7.1 TRANSFORMATION LINÉAIRE

Cours 20

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.
- ✓ Les propriétés du déterminant.
- ✓ La matrice adjointe.
- ✓ Le calcul de l'inverse à l'aide de la matrice adjointe.

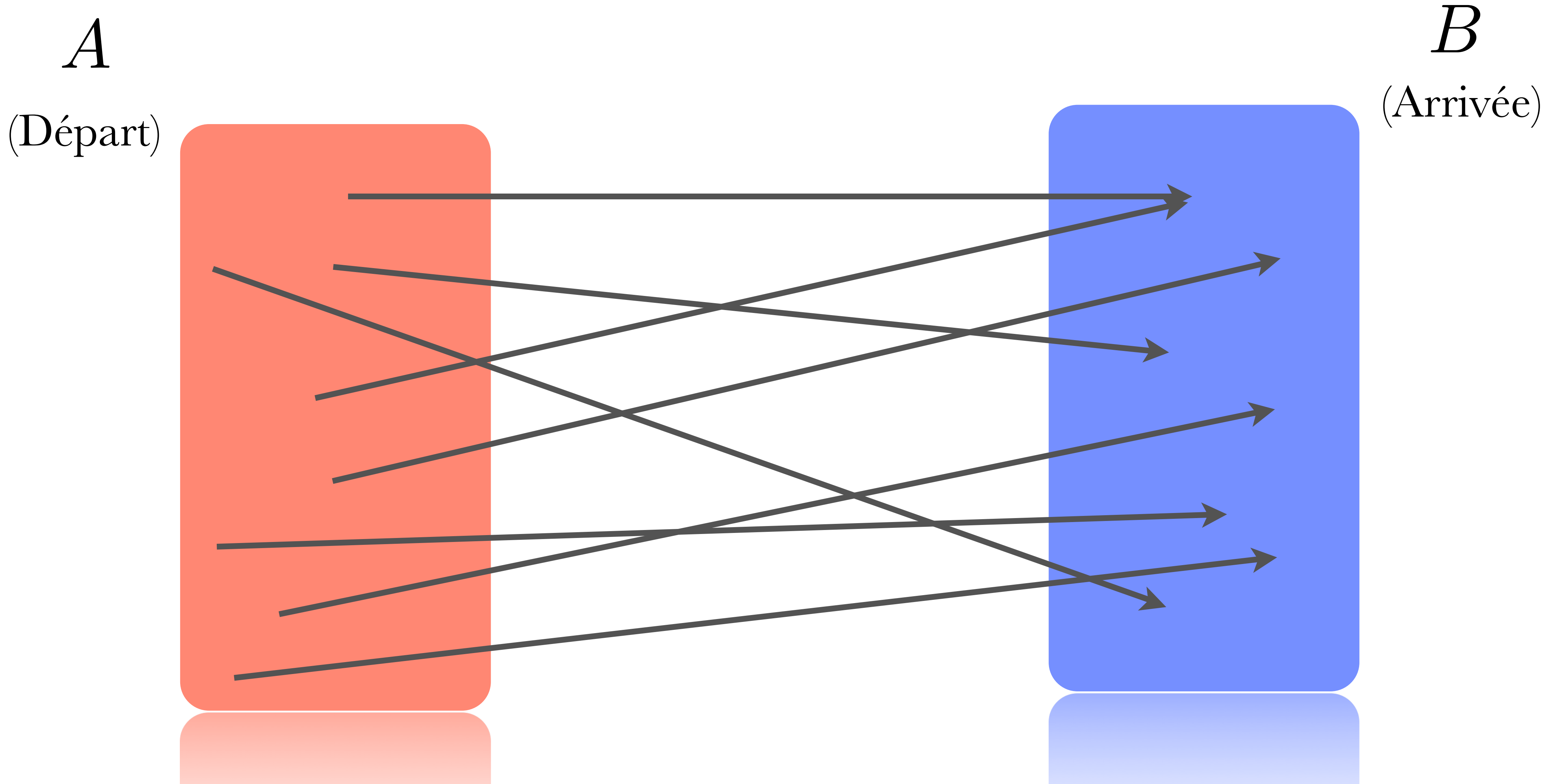
Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Les transformations linéaires.
- ✓ Le lien avec les matrices.

Un des objets d'étude de prédilection en mathématiques est la fonction.

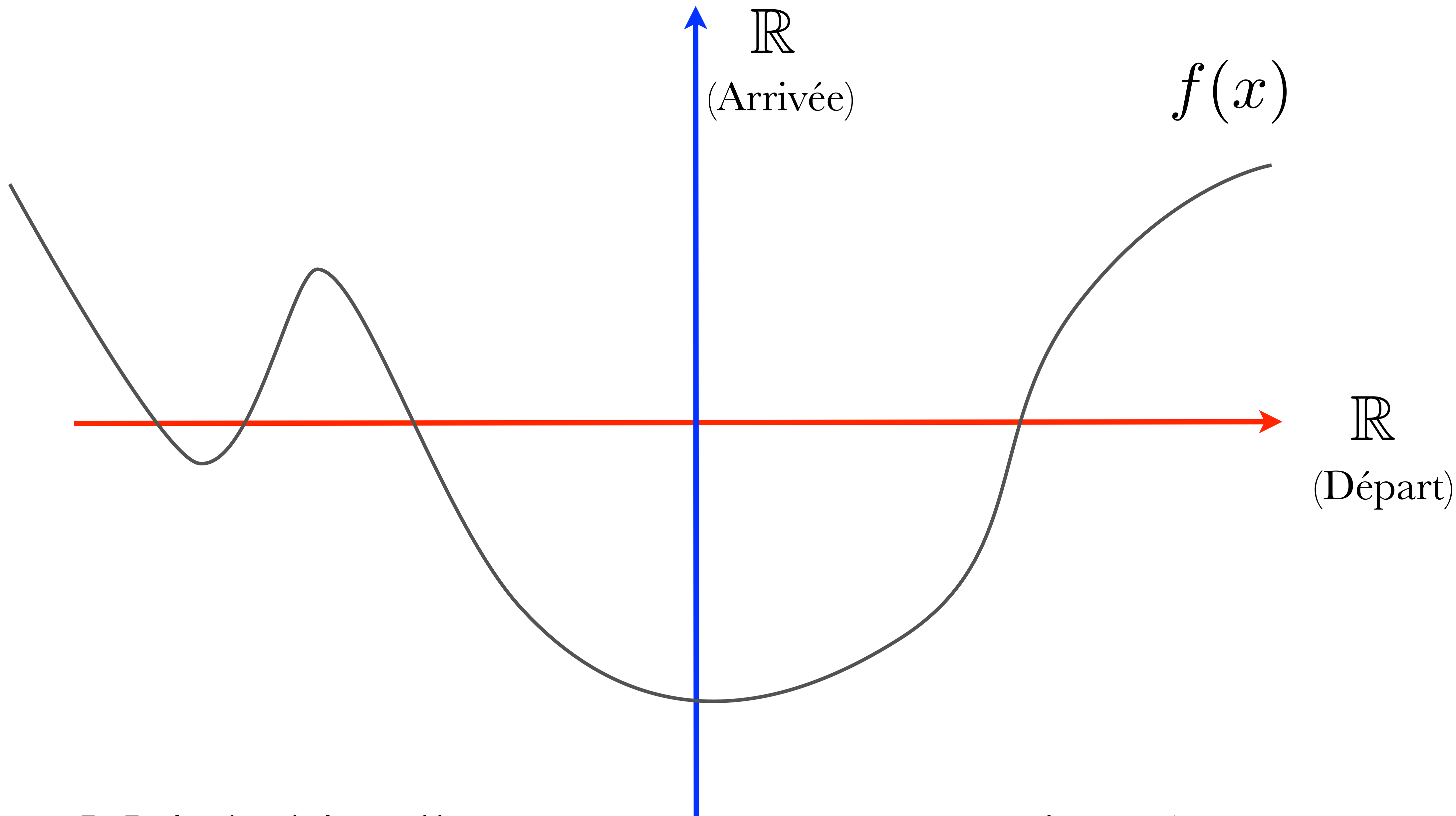
Une fonction est une règle qui associe à un élément d'un ensemble de départ un unique élément de l'ensemble d'arrivée.

$$f : A \to B$$



Les fonctions que vous avez vues depuis le début de vos études sont essentiellement des fonctions du type

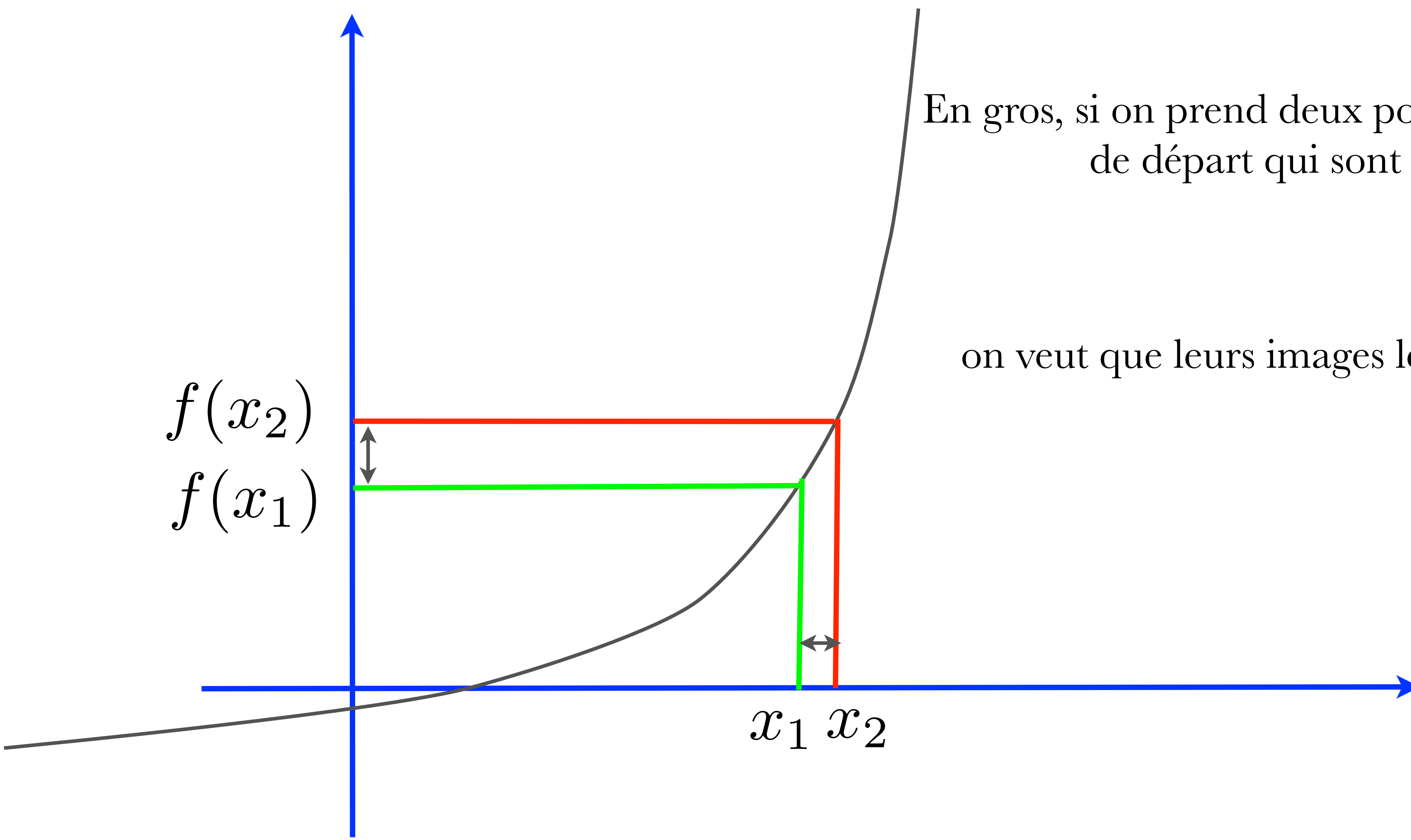
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



Mais habituellement, on se contente de présenter des fonctions «intéressantes».

Les fonctions qu'on qualifie d'«intéressantes» dépendent de ce qu'on considère comme important de préserver.

Par exemple, pour les fonctions continues, on veut préserver la notion de proximité.



En gros, si on prend deux points de l'ensemble de départ qui sont proches,

on veut que leurs images le soit également.

Les fonctions qu'on veut étudier en algèbre linéaire vont être des fonctions du type;

$$f : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$$

avec $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ des espaces vectoriels.

Bon, avant de se perdre dans l'abstraction, on ne va considérer, pour le moment, que les fonctions de type

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Ok, mais qu'est-ce qu'on veut préserver?

Eh bien, essentiellement tout ce qu'on a sous la main...
soit la somme et la multiplication par un scalaire!

En d'autres termes on veut que l'image de la somme
soit la somme des images

et que l'image d'une multiplication par un scalaire
soit la multiplication par un scalaire de l'image.

Une telle fonction va porter un nom:

Définition

Soit $f : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, une fonction de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$, avec $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ deux espaces vectoriels.

La fonction f est dite une **transformation linéaire** s

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(k\vec{u}) = kf(\vec{u})$$

Pour les prochains cours, on va donc s'attarder sur les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Et pour mettre l'emphase sur le fait qu'on travaille avec des transformations linéaires, on va utiliser la lettre T au lieu de la lettre f.

Exemple Est-ce que la fonction $f(x, y) = (3x - 3y, 2y)$

est une transformation linéaire?

Soit $\vec{u} = (a, b)$ $\quad \vec{v} = (c, d)$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(\vec{u} + \vec{v})} = f((a, b) + (c, d)) = f((a + c, b + d))$$

$$= (3(a + c) - 3(b + d), 2(b + d))$$

$$= ((3a - 3b) + (3c - 3d), 2b + 2d)$$

$$= (3a - 3b, 2b) + (3c - 3d, 2d)$$

$$= f(a, b) + f(c, d) \boxed{= f(\vec{u}) + f(\vec{v})}$$

$$\boxed{f(k\vec{u})} = f(ka, kb) = (3(ka) - 3(kb), 2(kb))$$

$$= k(3a - 3b, 2b) = kf(a, b) \boxed{= kf(\vec{u})}$$

Faites les exercices suivants

p.251, # 1.

Ça ressemble à quoi une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est modélisée par un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

Donc, une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, par extension, devrait être un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$!?!

Ouin... je ne sais pas pour vous, mais moi, $\mathbb{R}^4$, je ne le vois pas!

Donc une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

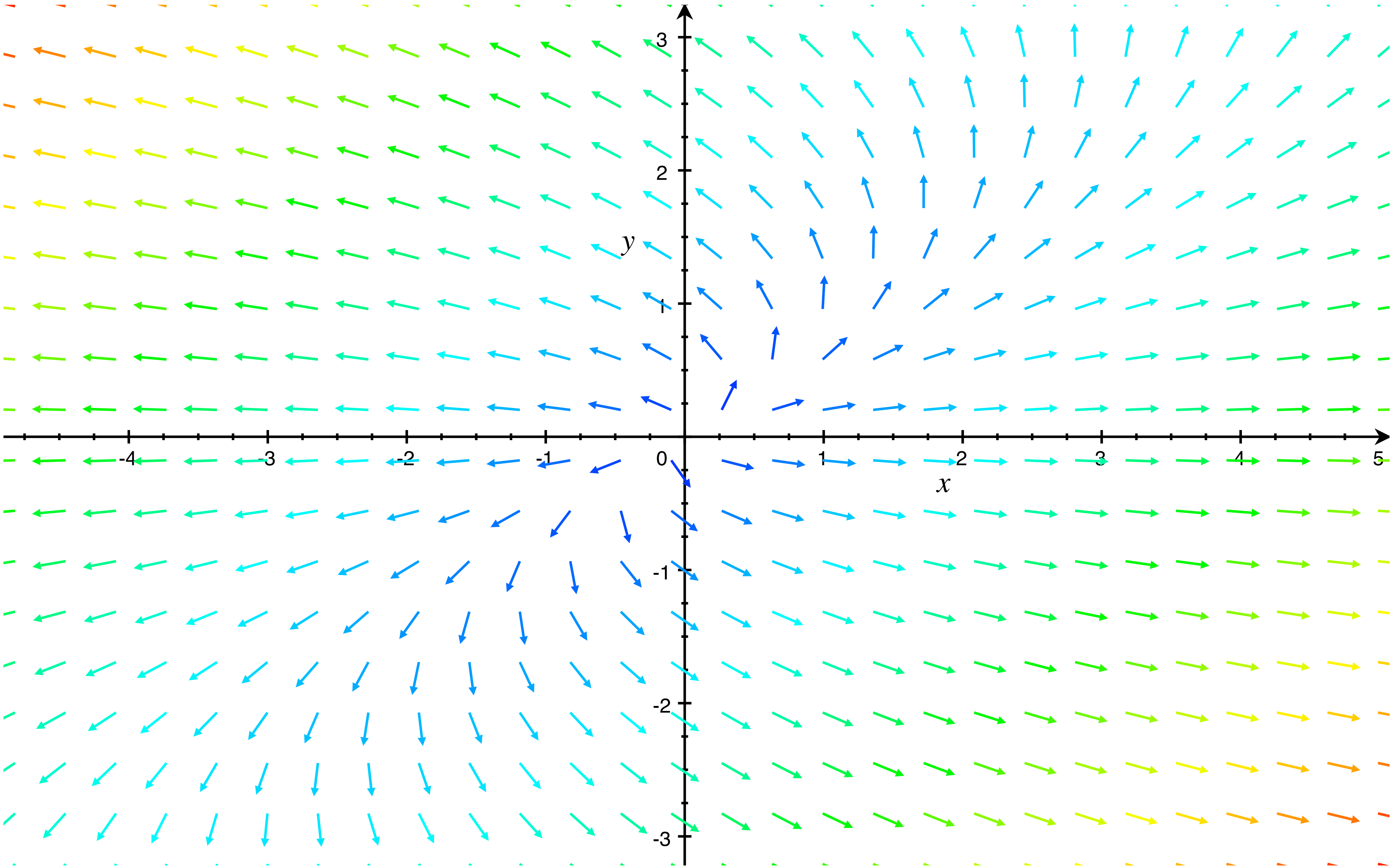
associe à chaque point du plan un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Et ça donne...

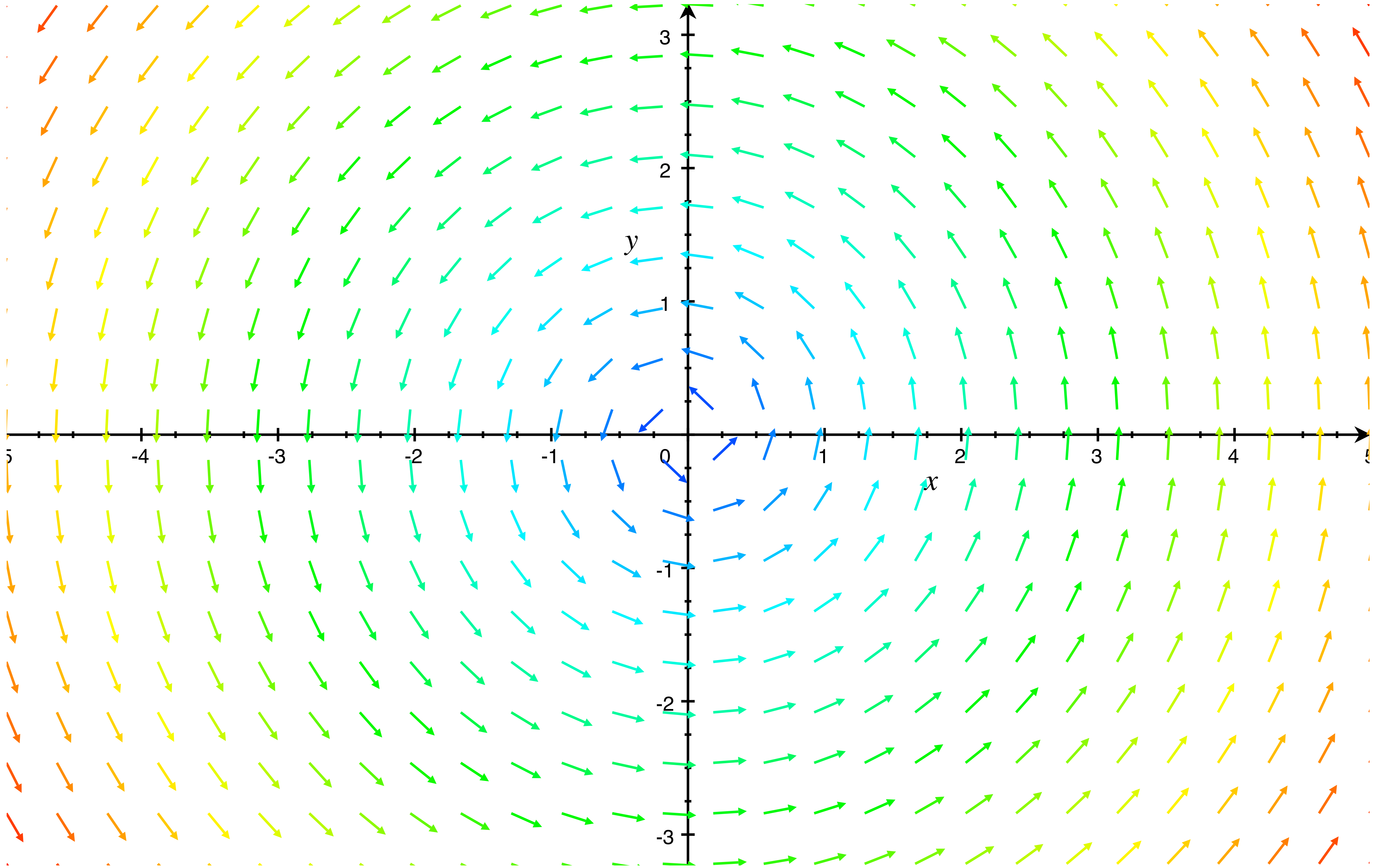
Un champ de fleurs.

Heu... je voulais dire un champ de vecteurs.

Par exemple, $f(x, y) = (3x - 3y, 2y)$ donne:

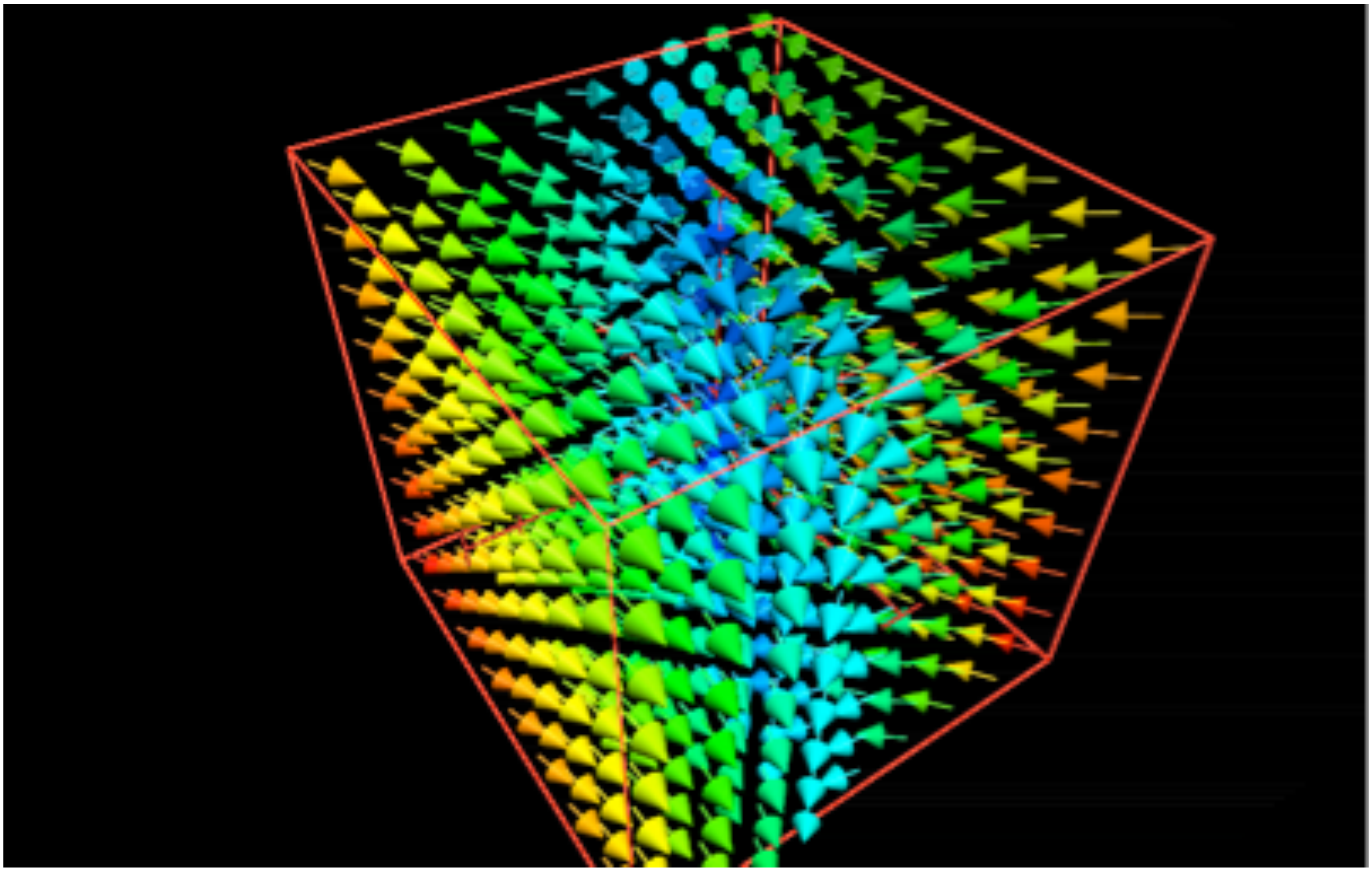


Certains champs de vecteurs sont plus parlants que d’autres.



On peut aussi modéliser des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

avec des champs de vecteurs.



Il se passe quelque chose de très particulier avec les transformations linéaires.

$$\vec{u} = (x, y) \quad = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

$$T(\vec{u}) = T(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \qquad = xT(\vec{\imath}) + yT(\vec{\jmath})$$

Il suffit donc de connaître pour tout connaître la fonction!!?!

$$T(\vec{\imath}) = (a, b) \qquad\qquad T(\vec{\jmath}) = (c, d)$$

$$T(\vec{u}) \;= x(a, b) + y(c, d) = (xa, xb) + (yc, yd)$$

$$= (xa + yc, xb + yd)$$

Hum... ça ressemble à quelque chose ça!

$$\vec{u} = (x, y) \qquad T(\vec{\imath}) = (a, b) \qquad T(\vec{\jmath}) = (c, d)$$

$$T(\vec{u}) = (xa + yc, xb + yd)$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \end{pmatrix}$$

Lignes

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

Colonnes

On peut modéliser les transformations linéaires avec les matrices!

Reprenons l'exemple $f(x, y) = (3x - 3y, 2y)$

$$f(5,7) = (3(5) - 3(7), 2(7)) = (-6, 14)$$

$$f(\vec{\imath}) = f(1,0) = (3, 0) \qquad f(\vec{\jmath}) = f(0,1) = (-3, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 3y \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Il y a donc une bijection entre les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et les matrices 2 x 2.

En fait, selon moi, la raison principale d'étudier les matrices, est pour mieux comprendre les transformations linéaires.

Regardons la composition de fonction.

Soit T et R, deux transformations linéaires et $\vec{u} = (x, y)$, un vecteur.

$$T(\vec{u}) = xT(\vec{\imath}) + yT(\vec{\jmath}) = \mathbf{MX} \qquad R(\vec{u}) = xR(\vec{\imath}) + yR(\vec{\jmath}) = \mathbf{NX}$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R \circ T(\vec{u}) = R(T(\vec{u})) = R\left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{NM})\mathbf{X}$$

On peut donc en conclure que la matrice inverse modélise la transformation inverse.

Car si $T(\vec{u}) = \mathbf{Mu}$ et $R(\vec{u}) = (\mathbf{M}^{-1})\mathbf{u}$

$$R \circ T(\vec{u}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Mu}) \quad = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{u} \quad = \mathbf{Iu}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \vec{u}$$

Donc, $R = T^{-1}$

Voici quelques propriétés des transformations linéaires.

Les preuves sont laissées en exercices.

1) Les transformations linéaires préservent le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

2) Les transformations linéaires préservent le parallélisme.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Longrightarrow T(\vec{u}) \parallel T(\vec{v})$$

3) Les transformations linéaires préservent les relations affines entre les points et les vecteurs.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow T(\vec{u}) = \overrightarrow{T(A)T(B)}$$

4) Les transformations linéaires préservent la colinéarité.

Si A, B, C sont colinéaires,

alors $T(A), T(B), T(C)$ le sont aussi.

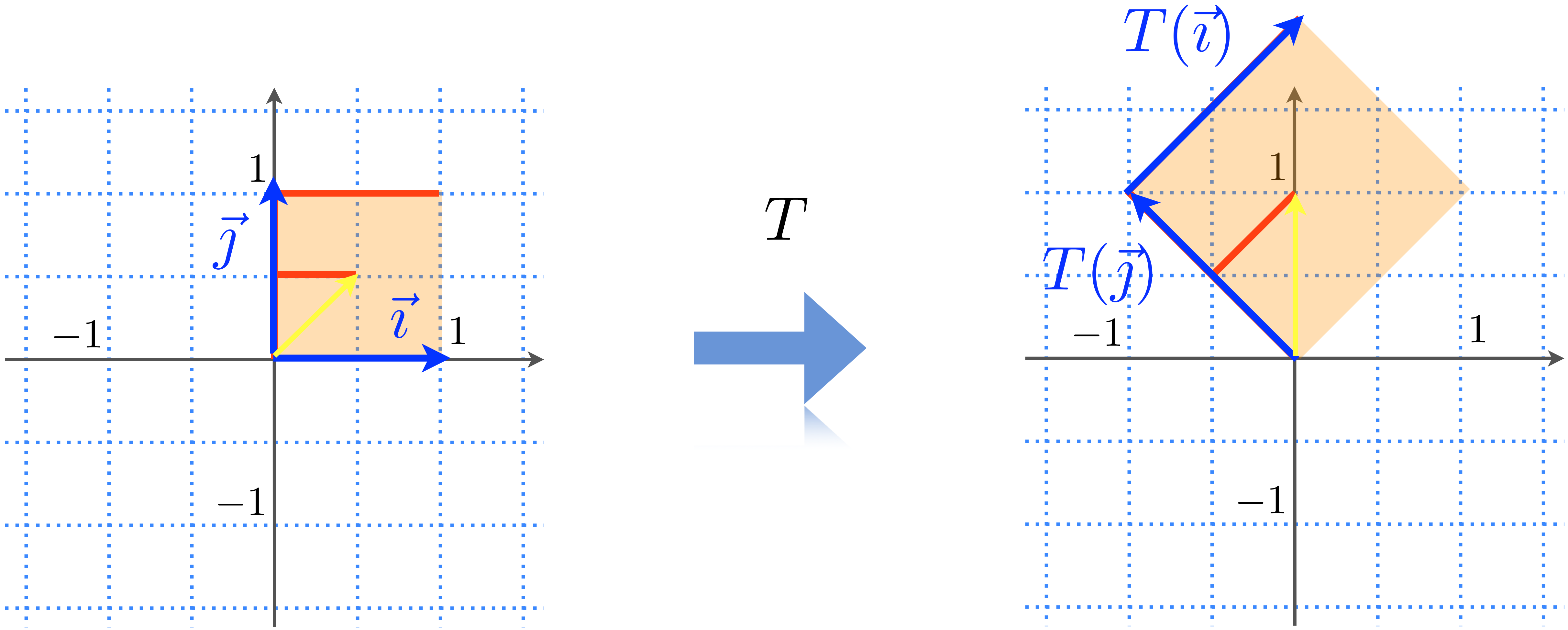
5) Les transformations linéaires transforment les droites en droites.

$$\vec{x} = \vec{p} + k\vec{d} \Longrightarrow T(\vec{x}) = T(\vec{p}) + kT(\vec{d})$$

Faites les exercices suivants

p.251 #3

Comment trouver la matrice à partir d'un dessin.



$$T(\vec{\imath}) = (1, 1)$$

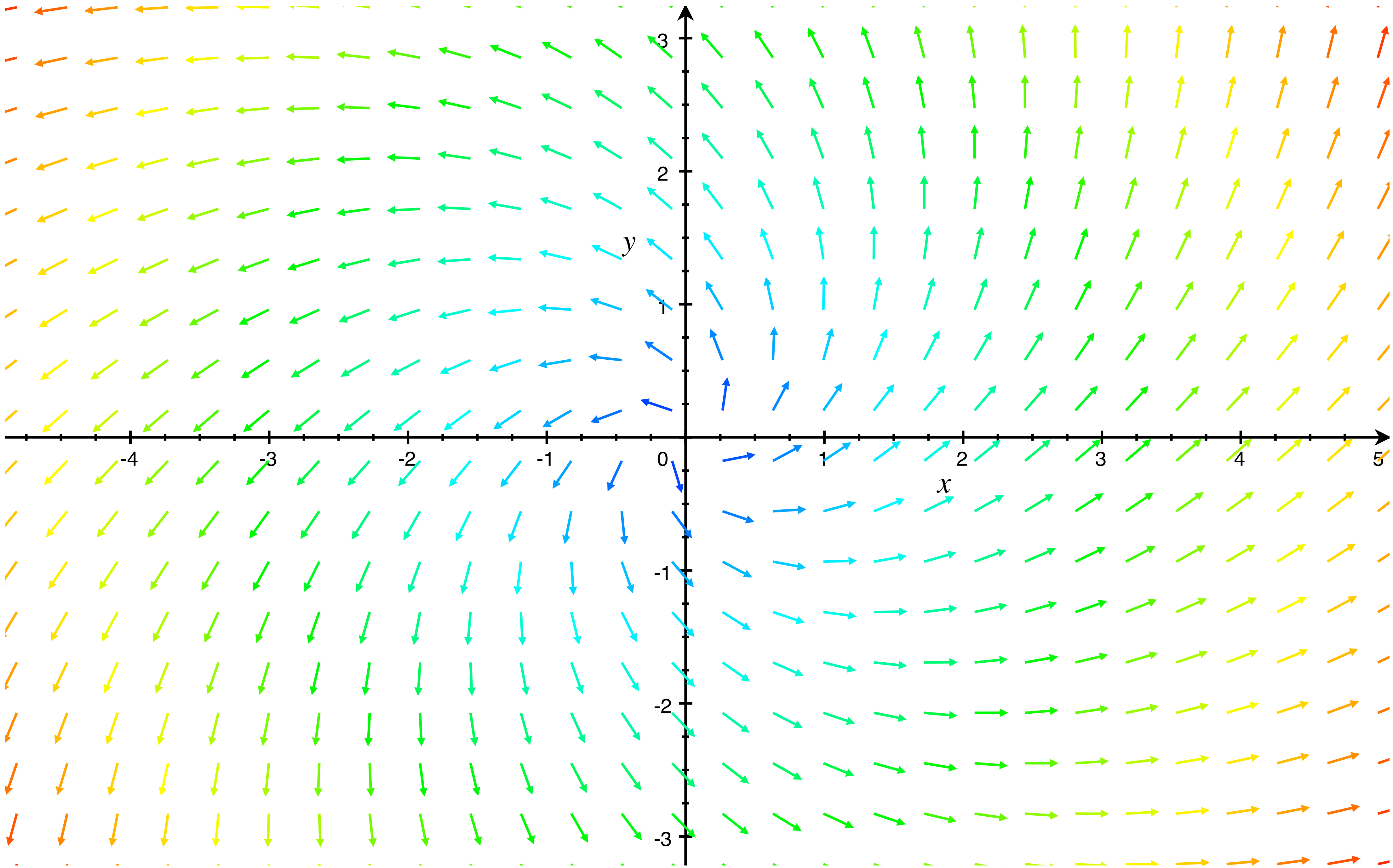
$$T(\vec{\jmath}) = (-1, 1)$$

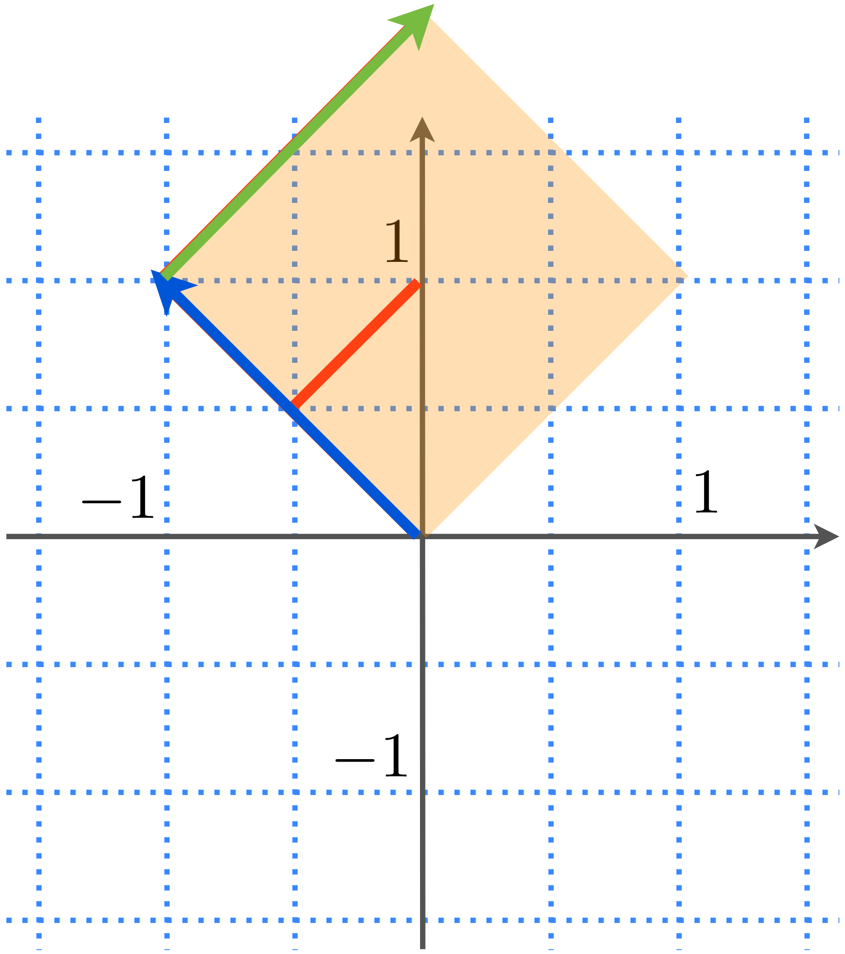
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

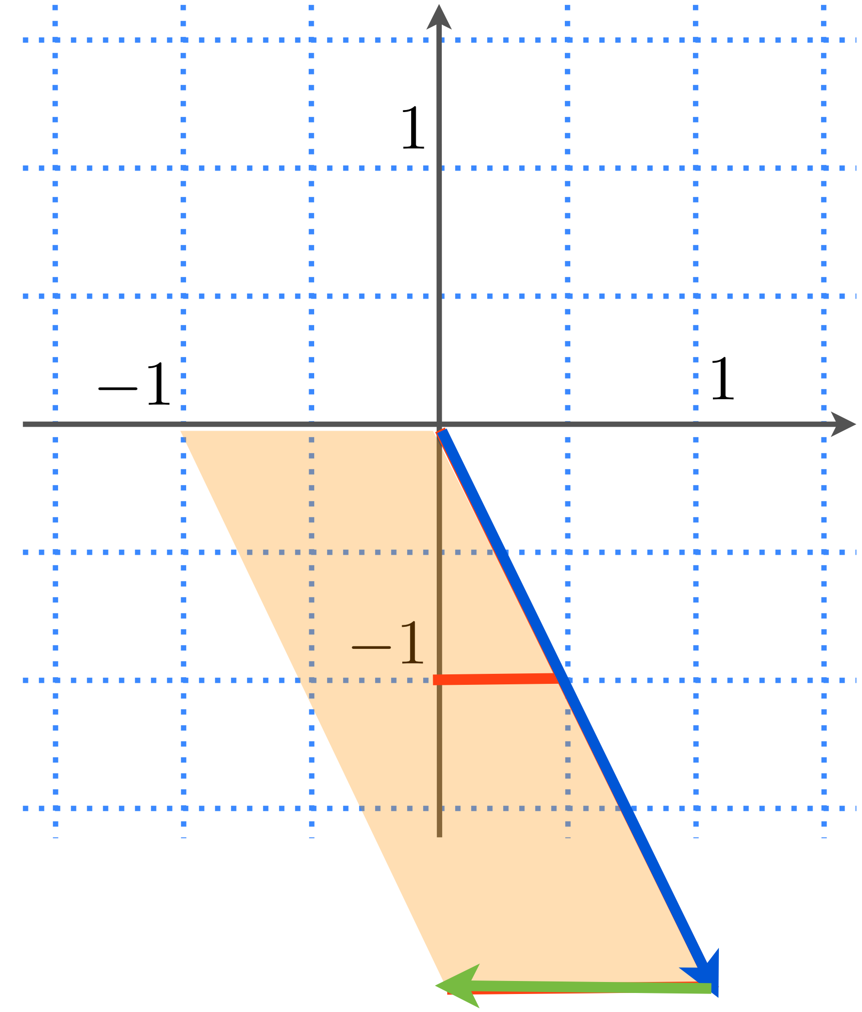
Ici, cette transformation peut être vue comme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \longleftrightarrow f(x,y) = (x-y, x+y)$$





T



$$T(\vec{\imath}) = \,?$$

$$T(\vec{\jmath}) = \,?$$

Ouin... pas facile!

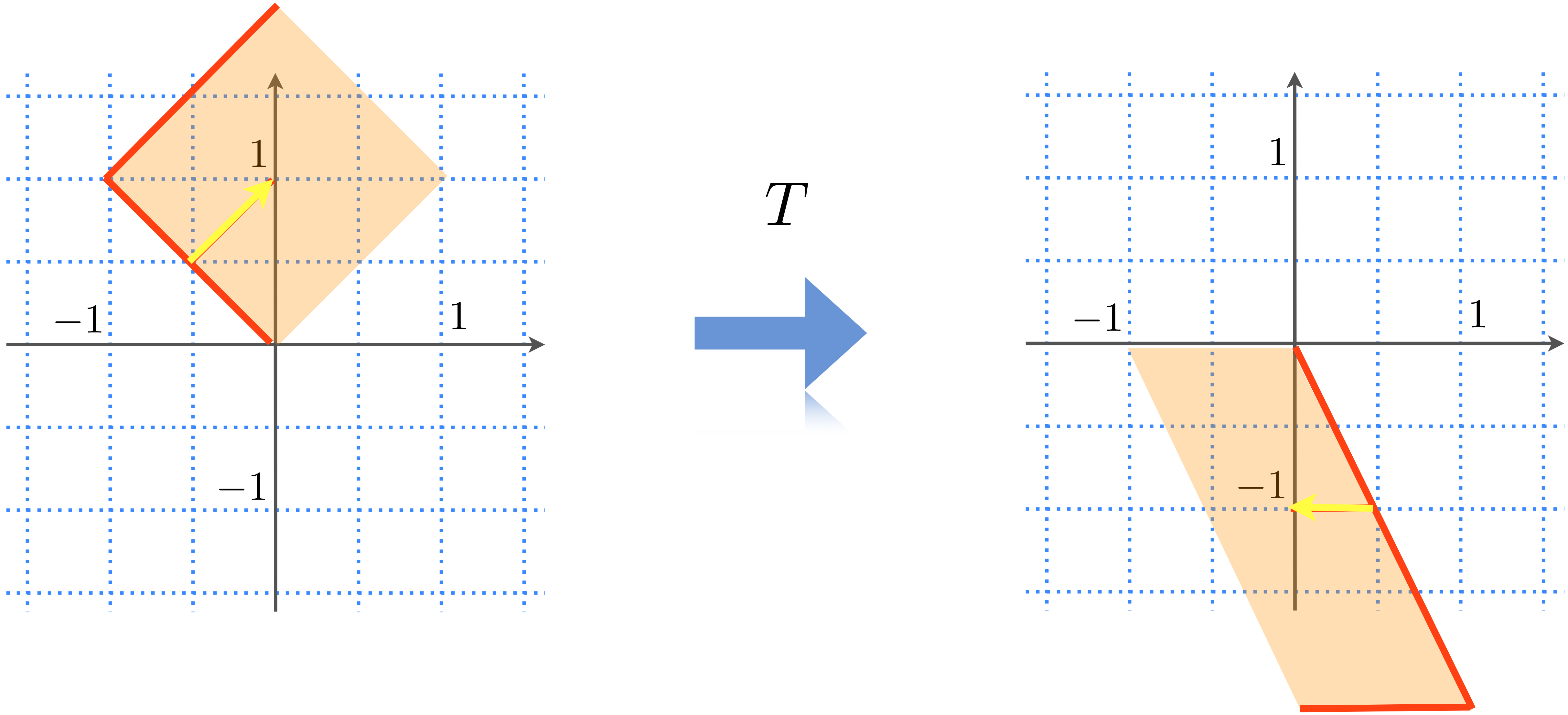
$$T(-1,1) = (1,-2)$$

$$T(1,1) = (-1,0)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$



$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Faites les exercices suivants

p. 251, #2 et 4.

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Les transformations linéaires.
- ✓ Le lien avec les matrices.

Devoir: p. 251 # 1 à 9