8.1 LES NOMBRES COMPLEXES

COMPLEXES

cours 26

cours 26

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ La définition des nombres complexes.
- ✓ Les opérations sur les nombres complexes.
- ✓ La formule de De Moivre.

Avec la venue de:

Doigts $\longrightarrow$ $\mathbb{N}$

Dettes $\longrightarrow$ $\mathbb{Z}$

Tartes $\longrightarrow$ $\mathbb{Q}$

Distances $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$

Certains problèmes ont nécessité la création de nouveaux nombres.

Problème: Solutionner l'équation suivante

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1} \quad \nexists$$

Solution: On invente un nouveau nombre!

Le nombre imaginaire i

tel que $i^2 = -1$

C'est bien beau d'inventer un nouveau nombre, encore faut-il qu'il puisse bien se comporter avec les anciens!

$$i^2 = -1$$

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$ Les nombres complexes

Somme

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$= (a + c) + (b + d)i$$

Soustraction

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$

$$= (a - c) + (b - d)i$$

Multiplication

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)(c+di) \\
&= ac + adi + bci + bdi^2 \\
&= ac + adi + bci - bd \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i
\end{aligned}
$$

Division

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)}{(c+di)}\frac{(c-di)}{(c-di)} \\
&= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - cdi + cdi - d^2i^2} \\
&= \frac{(ac+bd) + (-ad+bc)i}{c^2+d^2} \\
&= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i
\end{aligned}
$$

Quelques notations:

$$\text{Si} \quad z = a + bi$$

$\Re(z) = \mathrm{Re}(z) = a$ La partie réelle de z

$\Im(z) = \mathrm{Im}(z) = b$ La partie imaginaire de z

$\bar{z} = a - bi$ Le conjugué de z

Les puissances de i

$i^0 = \boxed{1}$

$i^1 = \boxed{i}$

$i^2 = \boxed{-1}$

$i^3 = i^2 i = \boxed{-i}$

$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = \boxed{1}$

$i^5 = i^4 i = \boxed{i}$

$i^6 = i^4 i^2 = \boxed{-1}$

$i^7 = i^4 i^3 = \boxed{-i}$

$i^8 = i^4 i^4 = \boxed{1}$

Un espace vectoriel sur les réels est la donnée

1. d'un ensemble $\mathcal{V}$ dont les éléments sont nommés des vecteurs
2. d'une opération interne sur $\mathcal{V}$ appelée la somme qui respecte les propriétés suivantes
3. d'une opération externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{V}$ appelée multiplication par un scalaire qui respecte les propriétés suivantes

$$\left\{\begin{array}{c} \vec{v}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{v} \\ (\vec{v}+\vec{u})+\vec{w}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w}) \\ \vec{v}+\vec{0}=\vec{v} \\ \vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} a(b\vec{v})=(ab)\vec{v} \\ (a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v} \\ a(\vec{v}+\vec{u})=a\vec{v}+a\vec{u} \\ 1\vec{v}=\vec{v} \end{array}\right.$$

On peut vérifier facilement que $\mathbb{C}$ forme un espace vectoriel.

La base la plus naturelle de cet espace vectoriel est:

$$\mathcal{B} = \langle 1, i \rangle$$

On a bien que tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit comme combinaison linéaire de 1 et de i.

$$z = a + bi \; = a(1) + b(i)$$

Et on ne peut pas multiplier 1 par un nombre réel pour obtenir i.

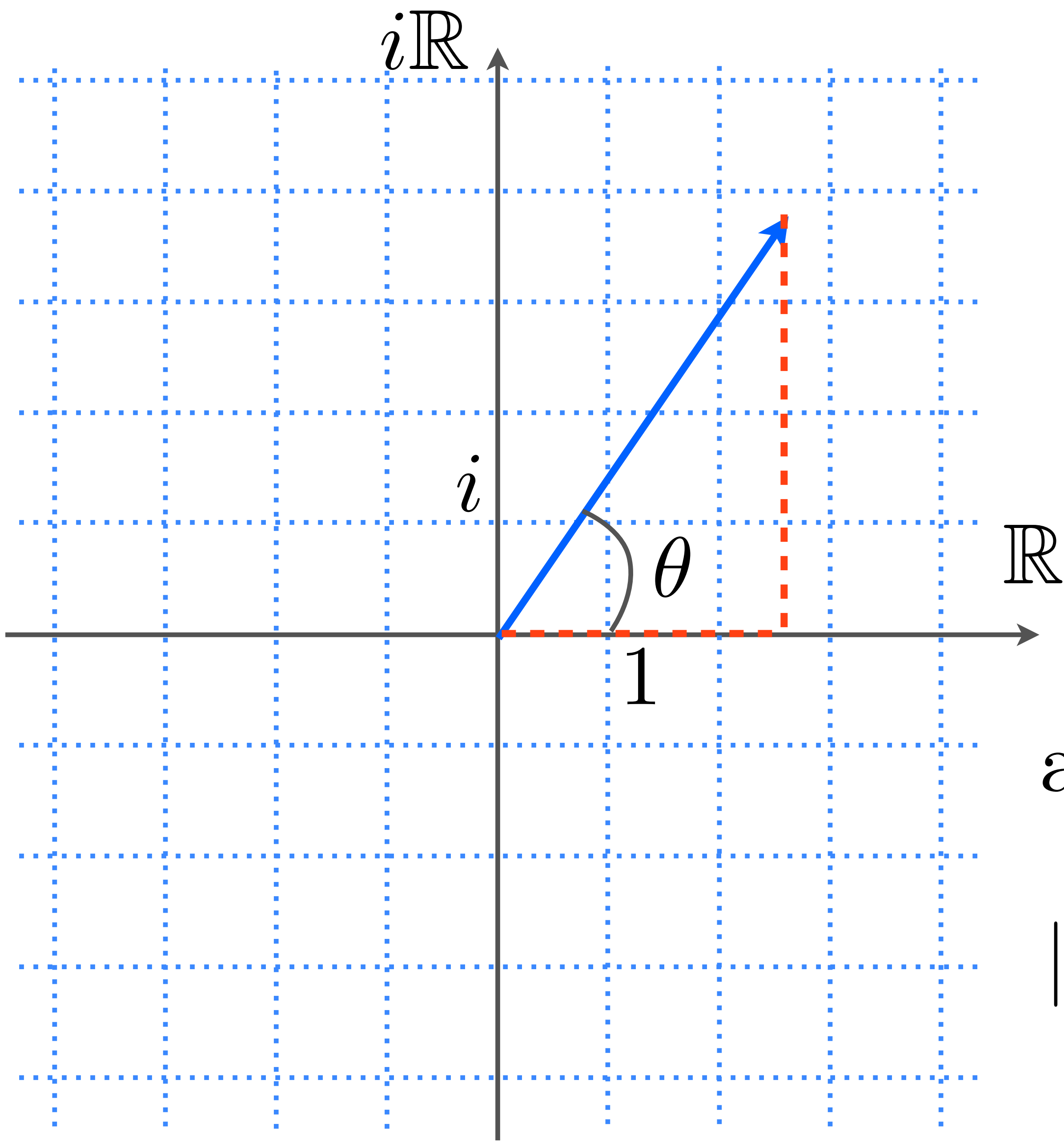
(linéairement indépendant)

Donc chaque nombre complexe est associé à ses composantes dans la base standard.

$$z = a + bi \longleftrightarrow z = (a, b)$$

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

Plan complexe.



$$(a, b) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$\arg(z) = \theta$ L'argument de z

$|z| = r$ La norme de z (ou le module)

Faites les exercices suivants

p. 294, # 1 à 6.

$$a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta \quad = r\text{cis}\theta$$

Petit rappel des séries de Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + i^6\frac{\theta^6}{6!} + i^7\frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots$$

$$= e^{i\theta}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$$

La formule de De Moivre

De cette équation, on obtient un bijou des mathématiques.

Si $r = 1$ et $\theta = \pi$ $e^{i\pi} = -1$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Un énorme avantage de la formule de De Moivre est de simplifier la multiplication et la division de nombres complexes.

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad\qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) \quad = (r_1 r_2) e^{i\theta_1 + i\theta_2} \; = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

On multiplie les longueurs et on additionne les angles!

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \quad = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

On divise les longueurs et on soustrait les angles!

Similairement, on peut utiliser la formule de De Moivre pour trouver des puissances de nombres complexes.

$$z = re^{i\theta}$$

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{i(n\theta)}$$

On prend la puissance de la norme et on multiplie l'angle.

Faites les exercices suivants

p.303 # 1 à 4

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ La définition des nombres complexes.
- ✓ Les opérations sur les nombres complexes.
- ✓ La formule de De Moivre.

Devoir:

p. 294, # 1 à 12.

et

p. 303, # 1 à 6.