8.3 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Cours 27

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La définition des nombres complexes.
- ✓ Les opérations sur les nombres complexes.
- ✓ La formule de De Moivre.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Les racines de l'unité.
- ✓ Le théorème fondamental de l'algèbre.

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce fait n'avait pas réellement d'impact sur ce qu'on a fait jusqu'à présent.

$$z^n = r^n e^{in(\theta+k2\pi)} = r^n e^{i(n\theta+(nk)2\pi)} = r^n e^{i(n\theta)}$$

Par contre, ceci va devenir important lorsqu'on va prendre des racines.

$$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{1}{2}(\theta+k2\pi)} = r^{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}$$

N'est pas qu'une réponse.

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

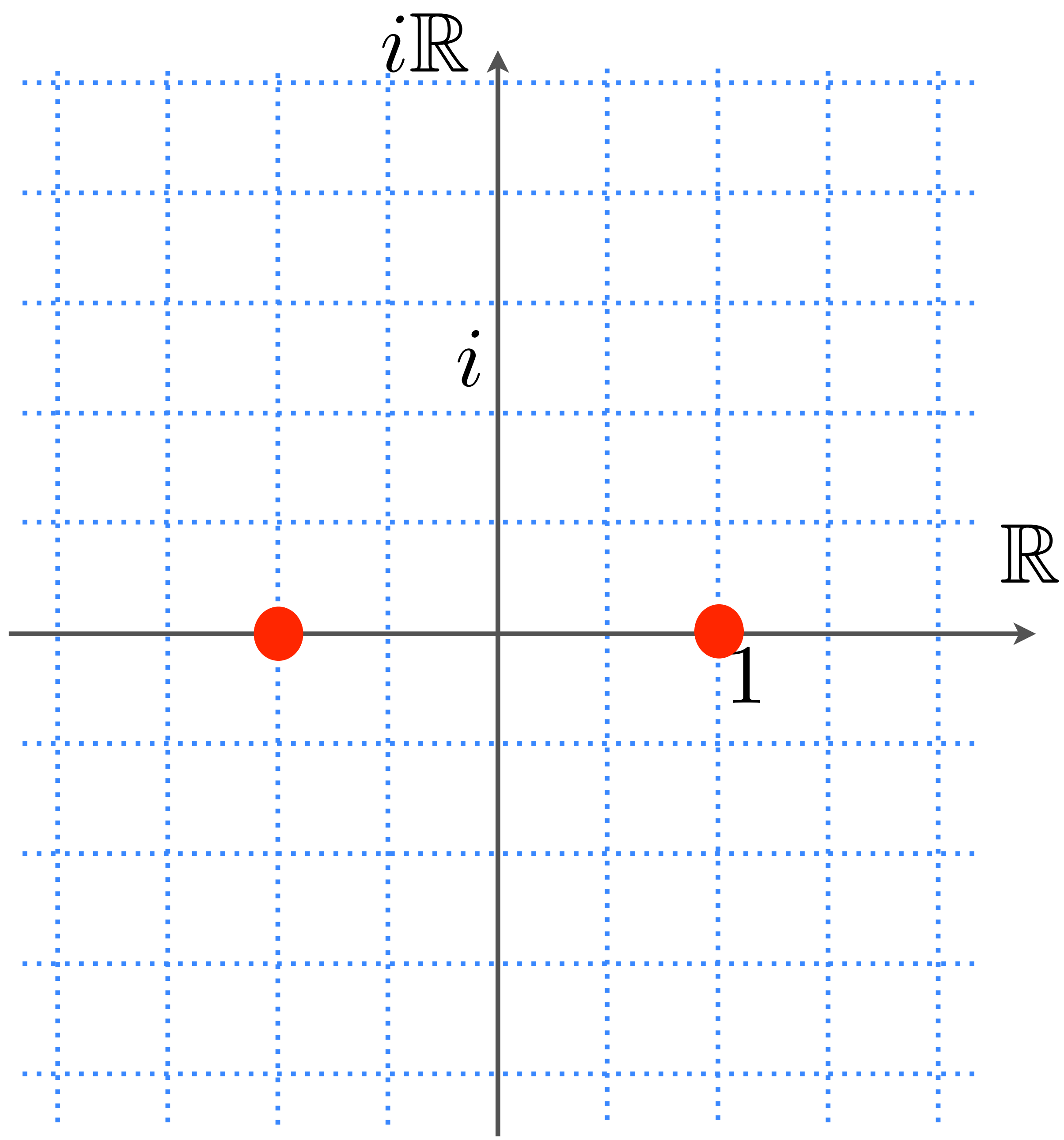
$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1$$

$$z_1 = e^{i(0)} = 1$$

$$z_2 = e^{i(\pi)} = -1$$

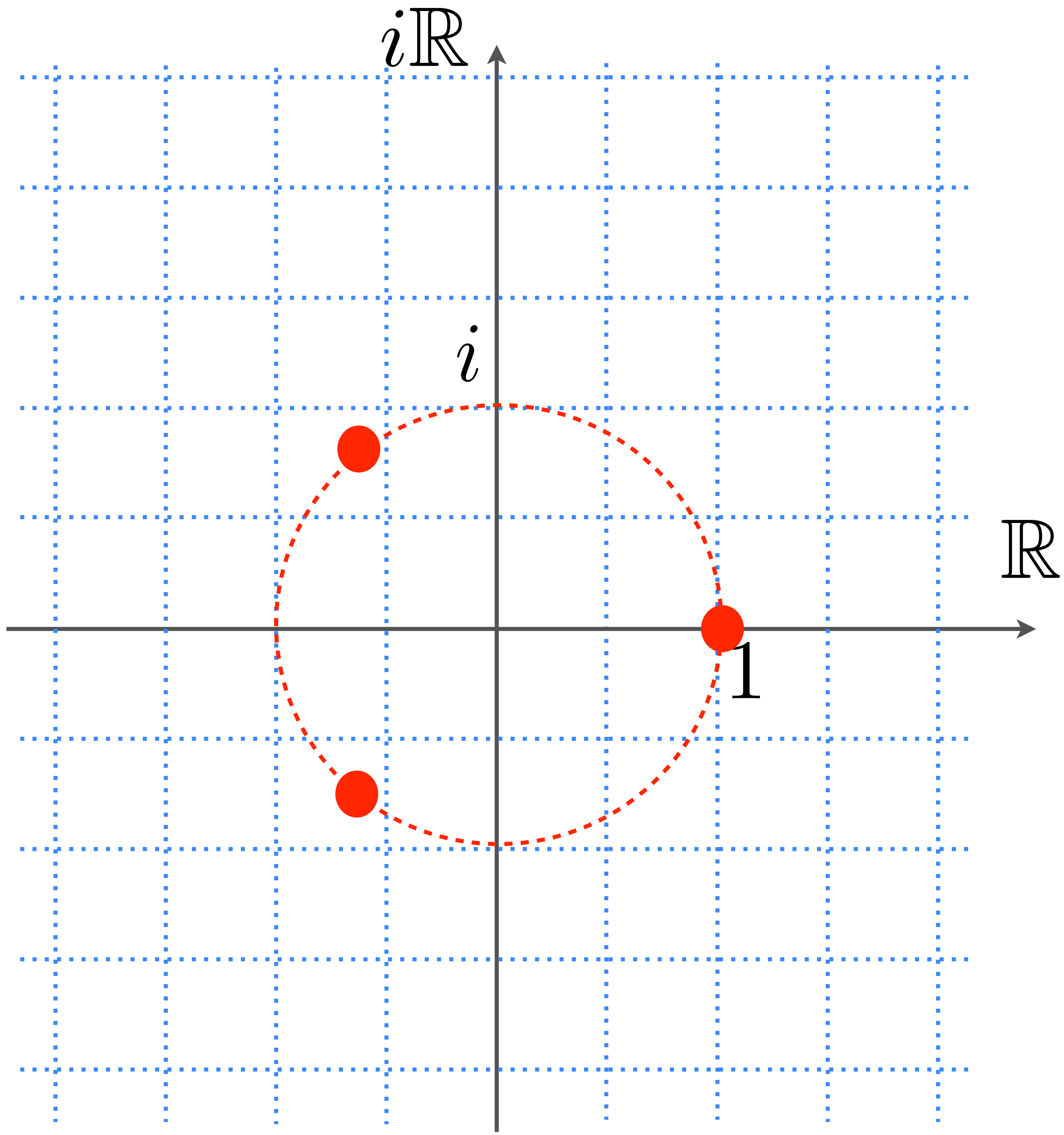


Exemple

Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$



Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

$$z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$$

Racines de l'unité

De manière plus générale, l'équation

$$x^n - 1 = 0$$

possède *n* solutions qui sont

$$e^{i(k\frac{2\pi}{n})} \quad \text{avec} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \;\Rightarrow\; 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \;\Rightarrow\; 3a^2=a^4-4 \;\Rightarrow\; a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0 \quad \text{avec} \quad c=a^2 \qquad c=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$=\frac{3\pm5}{2}=4,\cancel{-1}$$

donc

$$a^2=4 \;\Rightarrow\; a=\pm2 \qquad b=-1,1$$

$$\sqrt{3-4i} \;=2-i \quad \text{ou} \quad =-2+i$$

Faites les exercices suivants

p.304 # 7 à 10

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème Tout polynôme à coefficient complexe de degré $n \geq 1$ a au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.

C'est-à-dire:

$$\forall \ P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

$$\exists \alpha \ \text{ tel que } \ P(\alpha) = 0$$

Bien que ça semble simple, la preuve de ceci dépasse le cadre du cours.

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z-\alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{rl|l} & z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \cline{3-3} - & z^2 - 2z & z + 7 \\ \cline{2-2} & 7z - 14 & \\ - & 7x - 14 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

$$z^2 + 5z - 14 = (z-2)(z+7) + 0$$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$ Si on divise $P(z)$ par $(z-\alpha)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + R$$

Le reste est de degré 0.

$$0 = P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + R$$

$$= 0 + R$$

$$\Rightarrow R = 0$$

Les deux derniers théorèmes mis ensemble nous disent que tout polynôme complexe se factorise complètement.

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ &= (z-\alpha_1) Q_1(z) \\ &= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2) Q_2(z) \\ &\vdots \\ &= \beta (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n) \end{aligned}$$

Remarque: Le nombre de zéro d'un polynôme, avec multiplicité, est égal à son degré.

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))} = r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$= r^n(\cos(n(-\theta)) + i\sin(n(-\theta))) = r^n(\cos((-\theta)) + i\sin((-\theta)))^n$$

$$= r^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n \qquad = (r(\cos\theta - i\sin\theta))^n$$

$$= \overline{z}^n$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1 (\overline{z}) + a_0 \\
&= P(\overline{z})
\end{aligned}$$

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve: Si α est une racine de $P(z)$, alors

$$P(\alpha) = 0$$

d'où

$$P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

et donc

$\overline{\alpha}$ est aussi une racine de $P(z)$.

Remarque: On vient donc de diviser par deux la tâche de trouver les zéro d'un polynôme.

Corolaire: Tout polynôme de degré impair possède au moins un zéro réel.

Faites les exercices suivants

p.307 # 1 à 3

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Les racines de l'unité.
- ✓ Le théorème fondamental de l'algèbre.

Devoir: p. 304, # 6 à 13.

et

p. 307, # 1 à 8.