8.3 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Cours 27

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La définition des nombres complexes.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La définition des nombres complexes.
- ✓ Les opérations sur les nombres complexes.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La définition des nombres complexes.
- ✓ Les opérations sur les nombres complexes.
- ✓ La formule de De Moivre.

Aujourd’hui, nous allons voir

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Les racines de l’unité.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Les racines de l'unité.
- ✓ Le théorème fondamental de l'algèbre.

$$z = a + bi$$

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta}$$

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)}$$

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)}$$

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce fait n'avait pas réellement d'impact sur ce qu'on a fait jusqu'à présent.

$$z = a + bi \;= re^{i\theta} \;= re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce fait n'avait pas réellement d'impact sur ce qu'on a fait jusqu'à présent.

$$z^n = r^n e^{in(\theta+k2\pi)}$$

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce fait n'avait pas réellement d'impact sur ce qu'on a fait jusqu'à présent.

$$z^n = r^n e^{in(\theta+k2\pi)} = r^n e^{i(n\theta+(nk)2\pi)}$$

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce fait n'avait pas réellement d'impact sur ce qu'on a fait jusqu'à présent.

$$z^n = r^n e^{in(\theta+k2\pi)} = r^n e^{i(n\theta+(nk)2\pi)} = r^n e^{i(n\theta)}$$

$$z = a + bi \;\; = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce fait n'avait pas réellement d'impact sur ce qu'on a fait jusqu'à présent.

$$z^n = r^n e^{in(\theta+k2\pi)} = r^n e^{i(n\theta+(nk)2\pi)} = r^n e^{i(n\theta)}$$

Par contre, ceci va devenir important lorsqu'on va prendre des racines.

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce fait n'avait pas réellement d'impact sur ce qu'on a fait jusqu'à présent.

$$z^n = r^n e^{in(\theta+k2\pi)} = r^n e^{i(n\theta+(nk)2\pi)} = r^n e^{i(n\theta)}$$

Par contre, ceci va devenir important lorsqu'on va prendre des racines.

$$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{1}{2}(\theta+k2\pi)}$$

$$z = a + bi \quad = re^{i\theta} \quad = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce fait n'avait pas réellement d'impact sur ce qu'on a fait jusqu'à présent.

$$z^n = r^n e^{in(\theta+k2\pi)} = r^n e^{i(n\theta+(nk)2\pi)} = r^n e^{i(n\theta)}$$

Par contre, ceci va devenir important lorsqu'on va prendre des racines.

$$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{1}{2}(\theta+k2\pi)} = r^{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}$$

$$z = a + bi \;= re^{i\theta} \;= re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce fait n'avait pas réellement d'impact sur ce qu'on a fait jusqu'à présent.

$$z^n = r^n e^{in(\theta+k2\pi)} = r^n e^{i(n\theta+(nk)2\pi)} = r^n e^{i(n\theta)}$$

Par contre, ceci va devenir important lorsqu'on va prendre des racines.

$$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{1}{2}(\theta+k2\pi)} = r^{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}$$

N'est pas qu'une réponse.

Exemple

Exemple Trouver les racines carrées de 1

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)}$$

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)}$$

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1$$

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1$$

$$z_1 = e^{i(0)} = 1$$

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1$$

$$z_1 = e^{i(0)} = 1$$

$$z_2 = e^{i(\pi)}$$

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1$$

$$z_1 = e^{i(0)} = 1$$

$$z_2 = e^{i(\pi)} = -1$$

Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

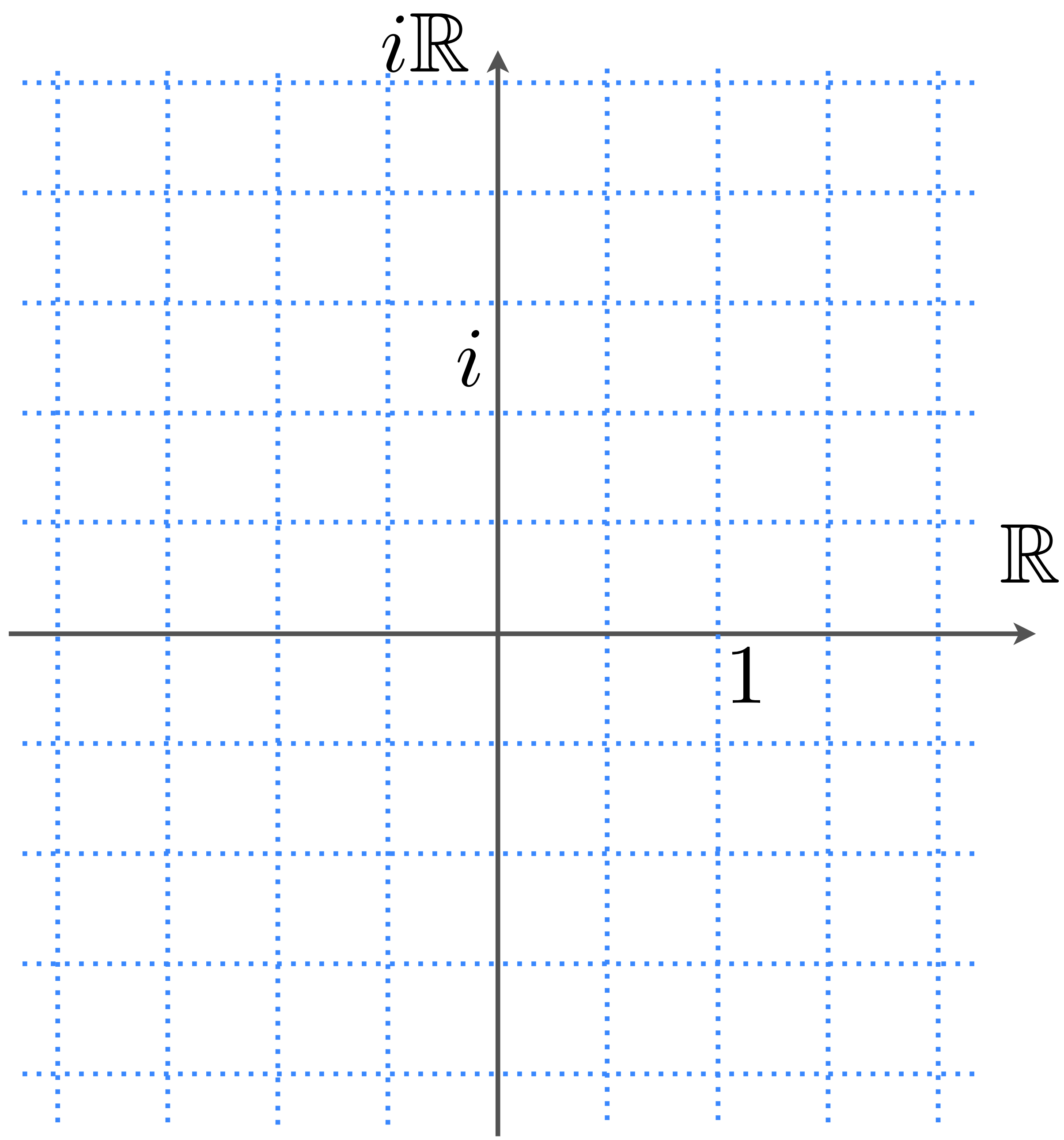
$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1$$

$$z_1 = e^{i(0)} = 1$$

$$z_2 = e^{i(\pi)} = -1$$



Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

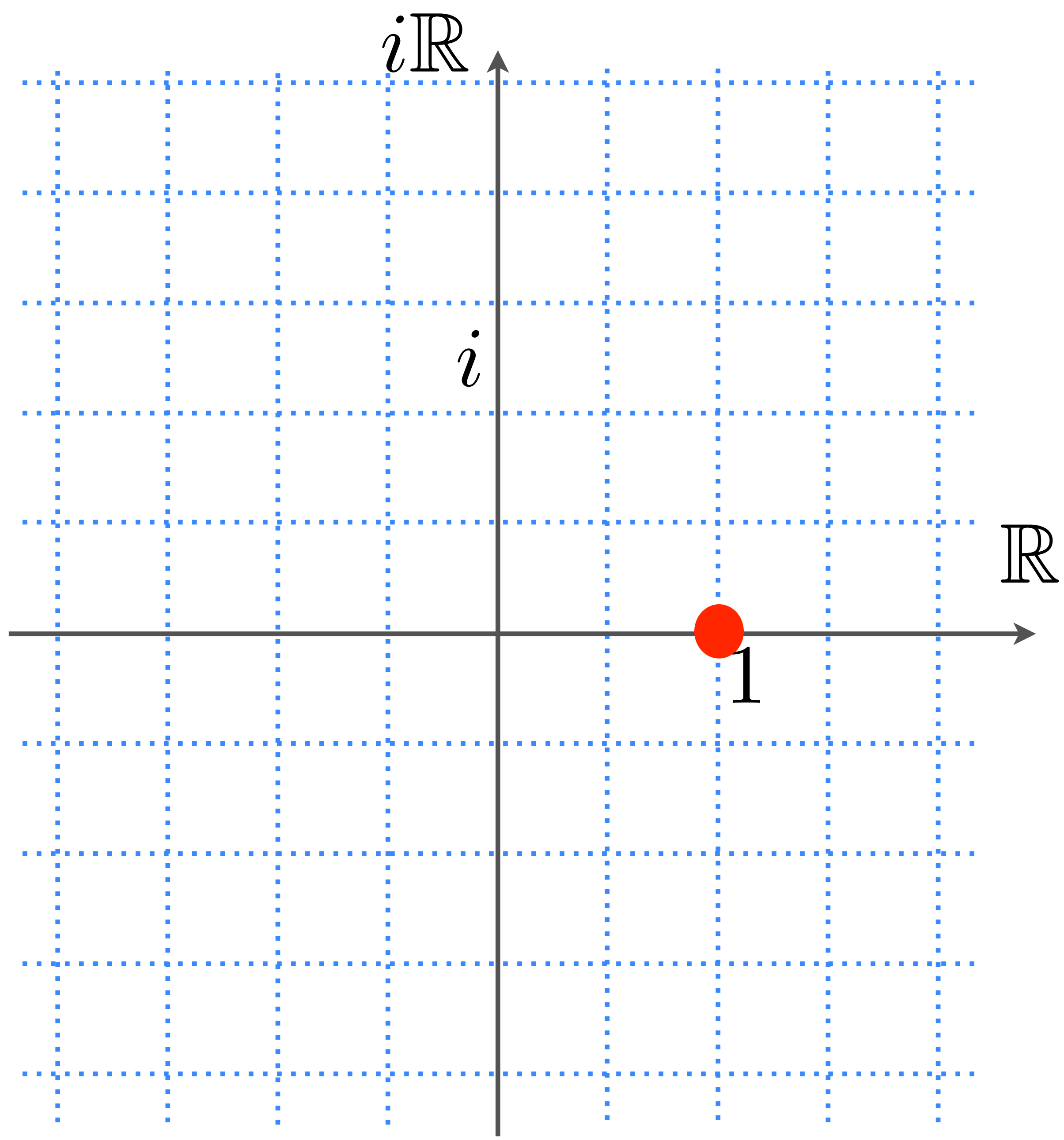
$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1$$

$$z_1 = e^{i(0)} = 1$$

$$z_2 = e^{i(\pi)} = -1$$



Exemple Trouver les racines carrées de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

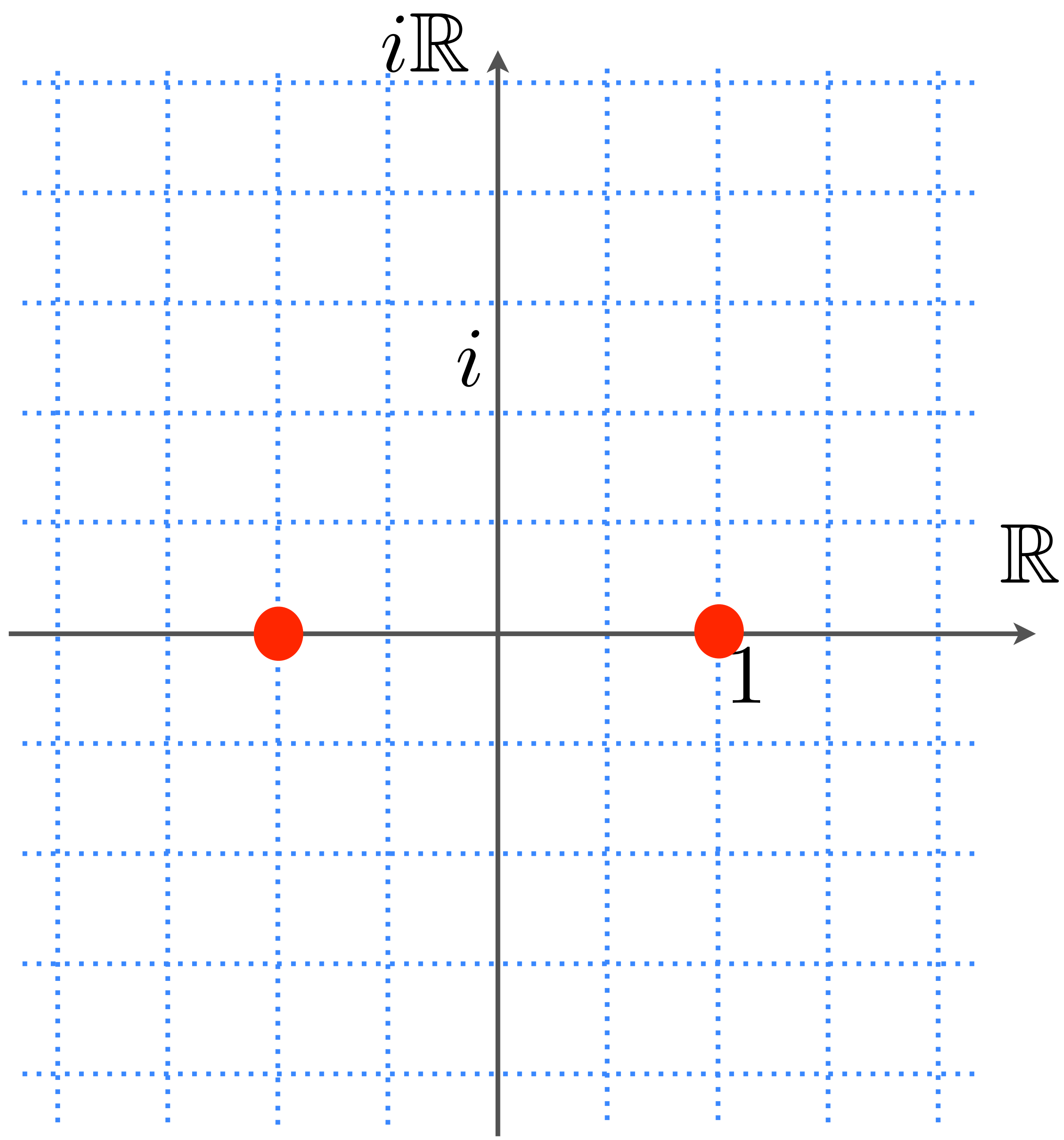
$$\sqrt{1} = e^{i\frac{1}{2}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1$$

$$z_1 = e^{i(0)} = 1$$

$$z_2 = e^{i(\pi)} = -1$$



Exemple

Exemple

Trouver les racines cubiques de 1

Exemple

Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)}$$

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Exemple

Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)}$$

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$

Exemple

Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

Exemple

Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

$$z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$

Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

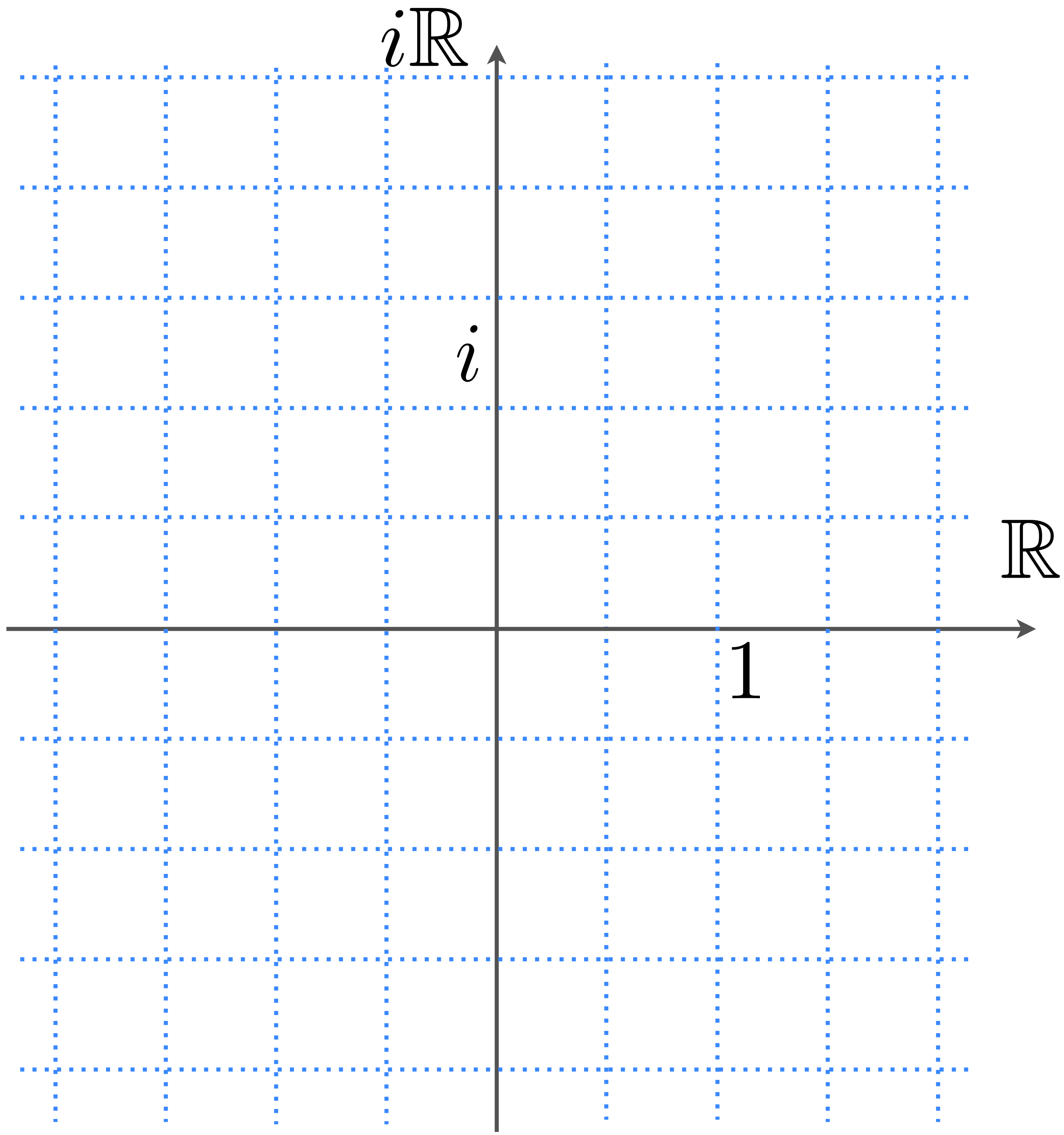
$$z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$$

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$



Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

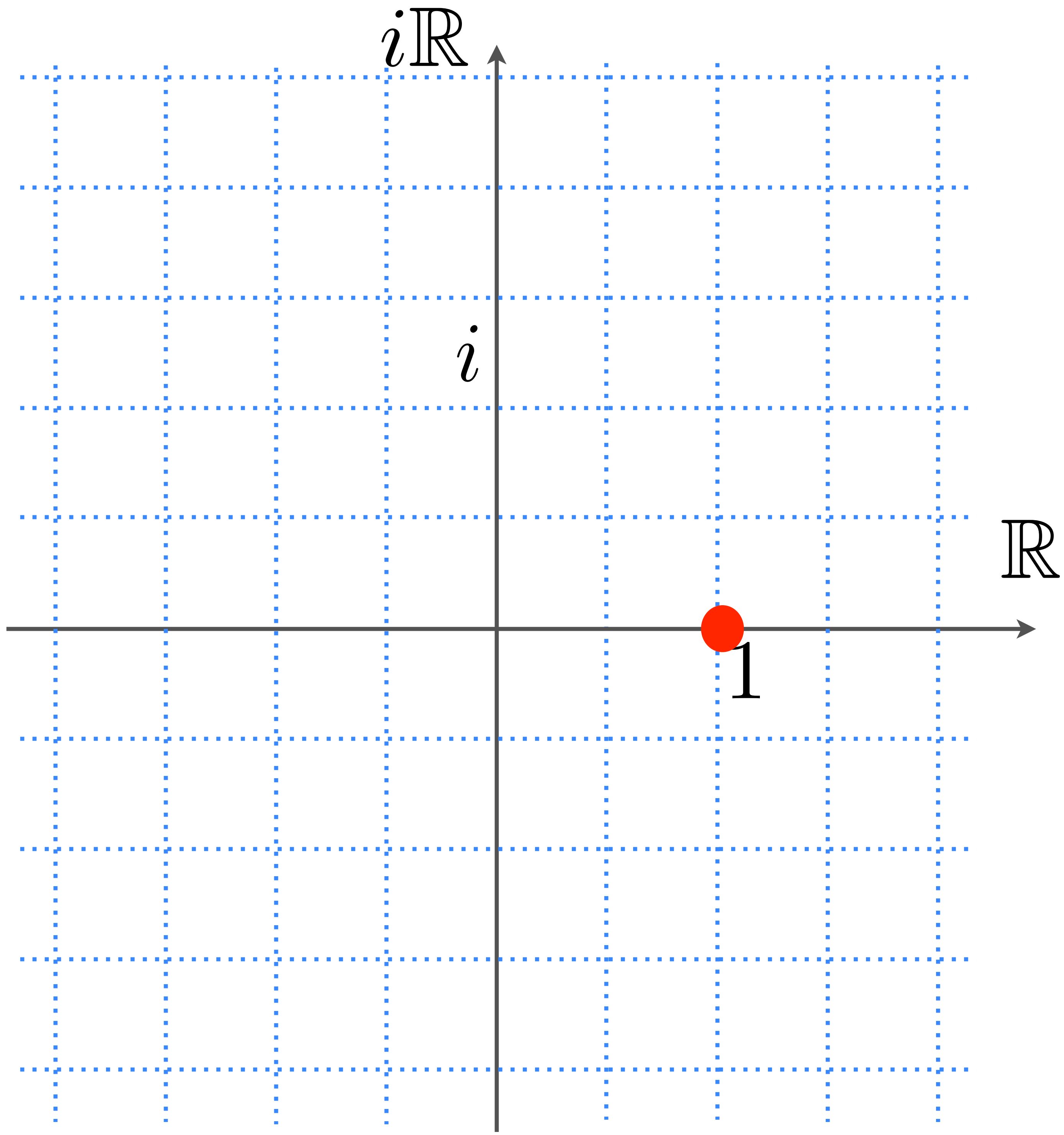
$$z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$$

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$



Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

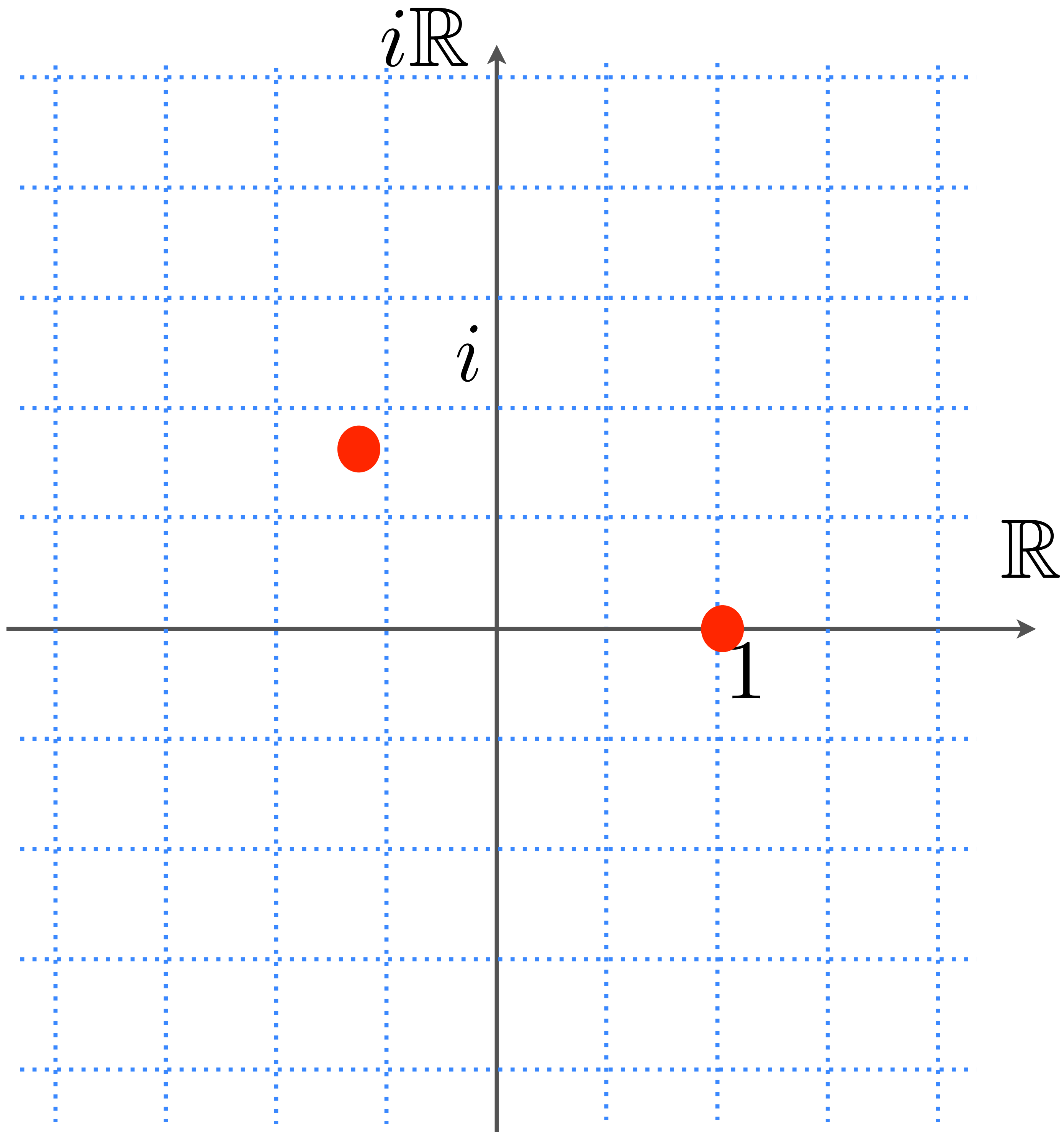
$$z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$$

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$



Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

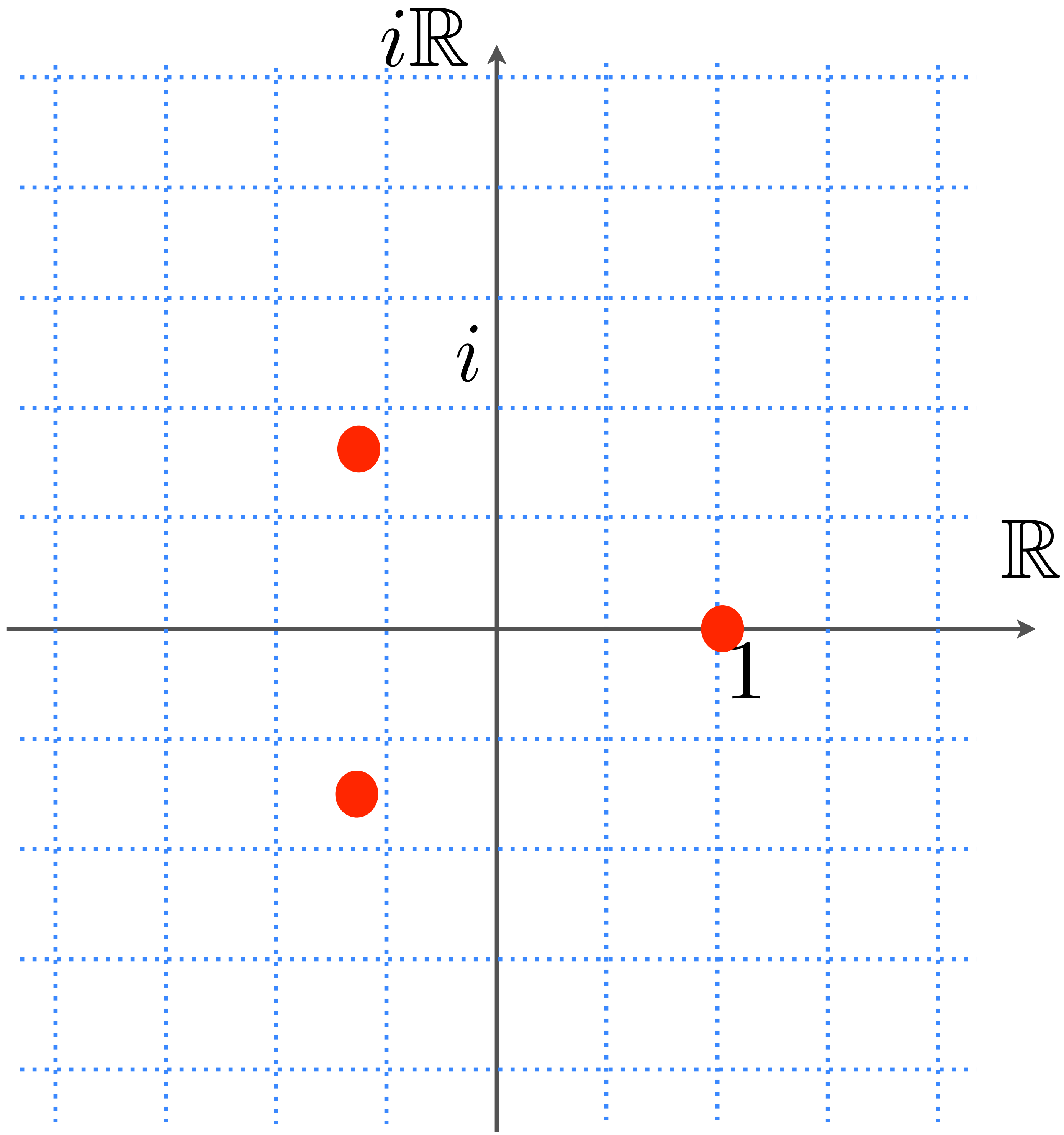
$$z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$$

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$



Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

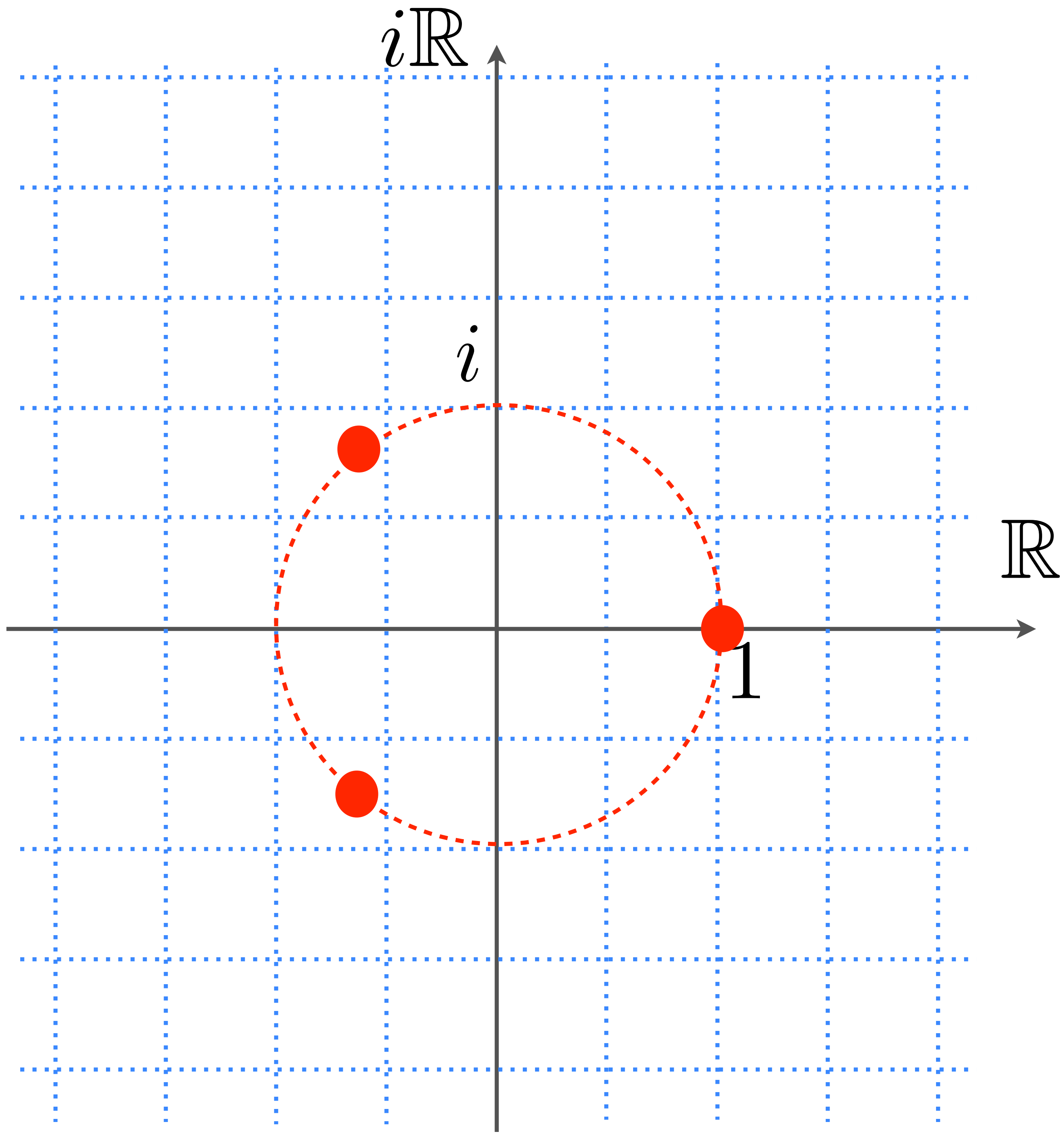
$$z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$$

Exemple Trouver les racines cubiques de 1

$$1 = e^{i(0+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{1}{3}(0+k2\pi)} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3}\pi)}$$



Ici, on a des réponses différentes pour

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i(0)}$$

$$z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$$

Racines de l'unité

De manière plus générale, l'équation

Racines de l'unité

De manière plus générale, l'équation

$$x^n - 1 = 0$$

Racines de l'unité

De manière plus générale, l'équation

$$x^n - 1 = 0$$

possède n solutions qui sont

Racines de l'unité

De manière plus générale, l'équation

$$x^n - 1 = 0$$

possède n solutions qui sont

$$e^{i(k\frac{2\pi}{n})}$$

Racines de l'unité

De manière plus générale, l'équation

$$x^n - 1 = 0$$

possède n solutions qui sont

$e^{i(k\frac{2\pi}{n})}$ avec

Racines de l'unité

De manière plus générale, l'équation

$$x^n - 1 = 0$$

possède *n* solutions qui sont

$$e^{i(k\frac{2\pi}{n})} \quad \text{avec} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Voici une autre façon de trouver la racine d’un nombre complexe.

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver .

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$.

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$3=a^2-b^2$ et

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3 - 4i = (a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \;\Rightarrow\; 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow 3 = a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b = -\frac{2}{a}$$

$$3 = a^2 - \frac{4}{a^2}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \;\Rightarrow\; 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \quad\Rightarrow\quad 3a^2=a^4-4 \quad\Rightarrow$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4 \Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4 \Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4 \Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

$c^2-3c-4=0$ avec

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow 3 = a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \quad \text{et} \quad b = -\frac{2}{a}$$

$$3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 3a^2 = a^4 - 4 \quad \Rightarrow \quad a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$c^2 - 3c - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad c = a^2$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow 3 = a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b = -\frac{2}{a}$$

$$3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2 = a^4 - 4 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$c^2 - 3c - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad c = a^2 \qquad c = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4 \Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0 \quad \text{avec} \quad c=a^2 \qquad c=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$=\frac{3\pm 5}{2}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \quad \text{et} \quad b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 3a^2=a^4-4 \quad \Rightarrow \quad a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0 \quad \text{avec} \quad c=a^2 \qquad c=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$=\frac{3\pm 5}{2} = 4,-1$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow 3 = a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b = -\frac{2}{a}$$

$$3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2 = a^4 - 4 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$c^2 - 3c - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad c = a^2 \qquad c = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2} = 4, \cancel{-1}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow 3 = a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b = -\frac{2}{a}$$

$$3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2 = a^4 - 4 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$c^2 - 3c - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad c = a^2 \qquad c = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2} = 4, \cancel{-1}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4 \Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0 \quad \text{avec} \quad c=a^2 \qquad c=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

donc

$$=\frac{3\pm 5}{2}=4,\cancel{-1}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \quad \text{et} \quad b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4 \Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0 \quad \text{avec} \quad c=a^2$$

$$c=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$=\frac{3\pm 5}{2}=4,\cancel{-1}$$

donc

$$a^2=4$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4 \Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0 \quad \text{avec} \quad c=a^2 \qquad c=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

donc

$$=\frac{3\pm 5}{2} = 4, \cancel{-1}$$

$$a^2=4 \Rightarrow$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b=-\frac{2}{a}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4 \Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0 \quad \text{avec} \quad c=a^2$$

$$c=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$=\frac{3\pm 5}{2}=4,\cancel{-1}$$

donc

$$a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \;\Rightarrow\; 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } \boxed{b=-\frac{2}{a}}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \;\Rightarrow\; 3a^2=a^4-4 \;\Rightarrow\; a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0 \quad \text{avec} \quad \boxed{c=a^2}$$

$$c=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$=\frac{3\pm 5}{2} = 4, \cancel{-1}$$

donc

$$a^2=4 \;\Rightarrow\; a=\pm 2$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3 - 4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow 3 = a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } \boxed{b = -\frac{2}{a}}$$

$$3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2 = a^4 - 4 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$c^2 - 3c - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad c = a^2 \qquad c = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

donc

$$= \frac{3 \pm 5}{2} = 4, \cancel{-1}$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \qquad b = -1, 1$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i=(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3=a^2-b^2 \text{ et } -4=2ab \Rightarrow 3=a^2-\left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } \boxed{b=-\frac{2}{a}}$$

$$3=a^2-\frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2=a^4-4 \Rightarrow a^4-3a^2-4=0$$

$$c^2-3c-4=0 \quad \text{avec} \quad \boxed{c=a^2} \qquad c=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$=\frac{3\pm 5}{2} = 4, \cancel{-1}$$

donc

$$a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \qquad b=-1,1$$

$$\sqrt{3-4i}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow 3 = a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } \boxed{b = -\frac{2}{a}}$$

$$3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2 = a^4 - 4 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$c^2 - 3c - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{c = a^2} \qquad c = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

donc

$$= \frac{3 \pm 5}{2} = 4, \cancel{-1}$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \qquad b = -1, 1$$

$$\sqrt{3-4i} = 2 - i$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3-4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow 3 = a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b = -\frac{2}{a}$$

$$3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2 = a^4 - 4 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$c^2 - 3c - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad c = a^2 \qquad c = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2} = 4, \cancel{-1}$$

donc

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \qquad b = -1, 1$$

$$\sqrt{3-4i} = 2 - i \quad \text{ou}$$

Voici une autre façon de trouver la racine d'un nombre complexe.

Exemple Trouver $\sqrt{3-4i}$. On cherche $a+bi$ tel que

$$3 - 4i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$3 = a^2 - b^2 \text{ et } -4 = 2ab \Rightarrow 3 = a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \text{ et } b = -\frac{2}{a}$$

$$3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \Rightarrow 3a^2 = a^4 - 4 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$c^2 - 3c - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad c = a^2$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-4)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2} = 4, \cancel{-1}$$

donc

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \qquad b = -1, 1$$

$$\sqrt{3-4i} = 2 - i \quad \text{ou} \quad = -2 + i$$

Faites les exercices suivants

p.304 # 7 à 10

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème Tout polynôme à coefficient complexe de degré $n \geq 1$ a au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème Tout polynôme à coefficient complexe de degré $n \geq 1$ a au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.

C'est-à-dire:

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème Tout polynôme à coefficient complexe de degré $n \geq 1$ a au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.

C'est-à-dire:

$$\forall \; P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème Tout polynôme à coefficient complexe de degré $n \geq 1$ a au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.

C'est-à-dire:

$$\forall \; P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

$$\exists \alpha \; \text{ tel que } \; P(\alpha) = 0$$

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème Tout polynôme à coefficient complexe de degré $n \geq 1$ a au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.

C'est-à-dire:

$$\forall \; P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

$$\exists \alpha \; \text{ tel que } \; P(\alpha) = 0$$

Bien que ça semble simple, la preuve de ceci dépasse le cadre du cours.

Théorème

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z - \alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z-\alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Exemple

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z-\alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

$(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14$$

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\iff$$

$$(z-\alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14$$

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

$(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

$(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

$(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$z^2 + 5z - 14$$

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

$(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$z^2 + 5z - 14 \quad \underline{|\ z-2 \quad}$$

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z-\alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{l|l} z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \hline & z \end{array}$$

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

$(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{l|l} z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \hline z^2 - 2z & z \end{array}$$

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z-\alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{r|l} z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \cline{2-2} -\quad z^2 - 2z \phantom{{}-14} & z \\ \hline \end{array}$$

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z-\alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{r|l} z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \cline{2-2} -\quad z^2 - 2z \phantom{{}-14} & z \\ \hline 7z - 14 & \end{array}$$

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

$(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{rl|l} & z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \cline{3-3} - & z^2 - 2z & z + 7 \\ \cline{2-2} & 7z - 14 & \end{array}$$

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z-\alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{rl|l} & z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \cline{3-3} - & z^2 - 2z & z + 7 \\ \cline{2-2} & 7z - 14 & \\ & 7x - 14 & \end{array}$$

Théorème

$$\alpha \text{ est un zéro de } P(z)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z-\alpha) \text{ est un facteur de } P(z)$$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{rl|l}
 & z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \cline{3-3}
- & z^2 - 2z & z + 7 \\ \cline{2-2}
 & 7z - 14 & \\
- & 7x - 14 & \\ \cline{2-2}
\end{array}$$

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

$(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{rr|l}
 & z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \cline{3-3}
- & z^2 - 2z & z + 7 \\ \cline{2-2}
 & 7z - 14 & \\
- & 7x - 14 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Théorème

α est un zéro de $P(z)$

$$\Longleftrightarrow$$

$(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Exemple

$$P(z) = z^2 + 5z - 14$$

$$P(2) = (2)^2 + 5(2) - 14 = 4 + 10 - 14 = 0$$

Donc 2 est un zéro.

$$\begin{array}{rr|l}
 & z^2 + 5z - 14 & z - 2 \\ \cline{3-3}
- & z^2 - 2z & z + 7 \\ \cline{2-2}
 & 7z - 14 & \\
- & 7x - 14 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

$$z^2 + 5z - 14 = (z-2)(z+7) + 0$$

Preuve:

Preuve: $(\Leftarrow)$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z)$$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha)$$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$ Si on divise $P(z)$ par $(z-\alpha)$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$ Si on divise $P(z)$ par $(z-\alpha)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + R$$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$ Si on divise $P(z)$ par $(z-\alpha)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + \boxed{R}$$

Le reste est de degré 0.

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$ Si on divise $P(z)$ par $(z-\alpha)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + \boxed{R} \qquad 0 = P(\alpha)$$

Le reste est de degré 0.

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$ Si on divise $P(z)$ par $(z-\alpha)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + R \qquad 0 = P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + R$$

Le reste est de degré 0.

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$ Si on divise $P(z)$ par $(z-\alpha)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + \boxed{R}$$

Le reste est de degré 0.

$$\begin{aligned} 0 = P(\alpha) &= (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + R \\ &= 0 + R \end{aligned}$$

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$ Si on divise $P(z)$ par $(z-\alpha)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + R \qquad 0 = P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + R$$
$$= 0 + R$$

Le reste est de degré 0.

Preuve: $(\Leftarrow)$ Si $(z-\alpha)$ est un facteur de $P(z)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) \qquad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$

$(\Rightarrow)$ Si on divise $P(z)$ par $(z-\alpha)$

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + R \qquad 0 = P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + R$$

$$= 0 + R$$

$$\Rightarrow R = 0$$

Le reste est de degré 0.

Les deux derniers théorèmes mis ensemble nous disent que tout polynôme complexe se factorise complètement.

Les deux derniers théorèmes mis ensemble nous disent que tout polynôme complexe se factorise complètement.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Les deux derniers théorèmes mis ensemble nous disent que tout polynôme complexe se factorise complètement.

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\
&= (z - \alpha_1) Q_1(z)
\end{aligned}
$$

Les deux derniers théorèmes mis ensemble nous disent que tout polynôme complexe se factorise complètement.

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ &= (z - \alpha_1) Q_1(z) \\ &= (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) Q_2(z) \end{aligned}$$

Les deux derniers théorèmes mis ensemble nous disent que tout polynôme complexe se factorise complètement.

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ &= (z - \alpha_1) Q_1(z) \\ &= (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) Q_2(z) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Les deux derniers théorèmes mis ensemble nous disent que tout polynôme complexe se factorise complètement.

$$\begin{aligned}
P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\
&= (z-\alpha_1)Q_1(z) \\
&= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)Q_2(z) \\
&\vdots \\
&= \beta(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)
\end{aligned}$$

Les deux derniers théorèmes mis ensemble nous disent que tout polynôme complexe se factorise complètement.

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\
&= (z - \alpha_1) Q_1(z) \\
&= (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) Q_2(z) \\
&\vdots \\
&= \beta (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)
\end{aligned}
$$

Remarque:

Les deux derniers théorèmes mis ensemble nous disent que tout polynôme complexe se factorise complètement.

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\
&= (z-\alpha_1)Q_1(z) \\
&= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)Q_2(z) \\
&\ \vdots \\
&= \beta(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)
\end{aligned}
$$

Remarque: Le nombre de zéro d'un polynôme, avec multiplicité, est égal à son degré.

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)}$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} \quad = \overline{ta+tbi}$$

$t \in \mathbb{R}$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} \quad = \overline{ta+tbi} \quad = ta - tbi$$

$t \in \mathbb{R}$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} \quad = \overline{ta+tbi} \quad = ta - tbi \quad = t(a-bi)$$

$t \in \mathbb{R}$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} \quad = \overline{ta+tbi} \quad = ta - tbi \quad = t(a-bi) \;= t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)}$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c) - (b+d)i$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di)$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))}$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))} = r^n(\cos(n\theta)-i\sin(n\theta))$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} \quad = \overline{ta+tbi} \quad = ta - tbi \quad = t(a-bi) \quad = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} \quad = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i \quad = (a-bi)+(c-di) \quad = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))} \quad = r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$= r^n(\cos(n(-\theta)) + i\sin(n(-\theta)))$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))} = r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$= r^n(\cos(n(-\theta)) + i\sin(n(-\theta))) = r^n(\cos((-\theta)) + i\sin((-\theta)))^n$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))} = r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$= r^n(\cos(n(-\theta)) + i\sin(n(-\theta))) = r^n(\cos((-\theta)) + i\sin((-\theta)))^n$$

$$= r^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))} = r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$= r^n(\cos(n(-\theta)) + i\sin(n(-\theta))) = r^n(\cos((-\theta)) + i\sin((-\theta)))^n$$

$$= r^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (r(\cos\theta - i\sin\theta))^n$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))} = r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$= r^n(\cos(n(-\theta)) + i\sin(n(-\theta))) = r^n(\cos((-\theta)) + i\sin((-\theta)))^n$$

$$= r^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n \qquad = (r(\cos\theta - i\sin\theta))^n$$

$$= \overline{z}^n$$

Pour des raisons qui vont devenir bientôt plus claires, explorons un peu le conjugué d'un nombre complexe.

$$\overline{tz} = \overline{t(a+bi)} = \overline{ta+tbi} = ta - tbi = t(a-bi) = t\overline{z}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$$

$$\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))} = r^n(\cos(n\theta)-i\sin(n\theta))$$

$$= r^n(\cos(n(-\theta))+i\sin(n(-\theta))) = r^n(\cos((-\theta))+i\sin((-\theta)))^n$$

$$= r^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (r(\cos\theta - i\sin\theta))^n$$

$$= \overline{z}^n$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\overline{P(z)}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \end{aligned}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0\end{aligned}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1 (\overline{z}) + a_0
\end{aligned}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1 (\overline{z}) + a_0
\end{aligned}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1 (\overline{z}) + a_0
\end{aligned}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1 (\overline{z}) + a_0
\end{aligned}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1 (\overline{z}) + a_0 \\
&= P(\overline{z})
\end{aligned}$$

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1 (\overline{z}) + a_0 \\
&= P(\overline{z})
\end{aligned}$$

Théorème

Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve:

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve: Si α est une racine de $P(z)$, alors

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve: Si α est une racine de $P(z)$, alors

$$P(\alpha) = 0$$

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve: Si α est une racine de $P(z)$, alors

$$P(\alpha) = 0$$

d'où

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve: Si α est une racine de $P(z)$, alors

$$P(\alpha) = 0$$

d'où

$$P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$$

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve: Si α est une racine de $P(z)$, alors

$$P(\alpha) = 0$$

d'où

$$P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0}$$

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve: Si α est une racine de $P(z)$, alors

$$P(\alpha) = 0$$

d'où

$$P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve: Si α est une racine de $P(z)$, alors

$$P(\alpha) = 0$$

d'où

$$P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

et donc

Théorème Les zéro d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjugués.

Preuve: Si α est une racine de $P(z)$, alors

$$P(\alpha) = 0$$

d'où

$$P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

et donc

$\overline{\alpha}$ est aussi une racine de $P(z)$.

Remarque:

On vient donc de diviser par deux la tâche de trouver les zéro d'un polynôme.

Remarque: On vient donc de diviser par deux la tâche de trouver les zéro d'un polynôme.

Corolaire: Tout polynôme de degré impair possède au moins un zéro réel.

Faites les exercices suivants

p.307 # 1 à 3

Aujourd’hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Les racines de l'unité.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Les racines de l'unité.
- ✓ Le théorème fondamental de l'algèbre.

Devoir: p. 304, # 6 à 13.

et

p. 307, # 1 à 8.