Examen 1 (solutions)

201-NYC Algèbre linéaire

24 septembre 2008

Professeur : Dimitri Zuchowski

Question 1. (18%)

a) $\vec{u}+\vec{v}=(0,4,3)$

b) $4\vec{u}-3\vec{v}+2\vec{w}=(4-3(-1)+2(-2),4(3)-3(1)+2(4),4(-2)-3(5)+2(1))=(3,17,-21)$

c) $\vec{r}\cdot\vec{s}=3(5)+0(3)-2(1)=13$

d) $\overrightarrow{AB}=(-9-6,4-(-1),1-3)=(-15,5-2)$

e) $\|\vec{w}\|=\sqrt{(-2)^2+4^2+1^2}=\sqrt{21}$

f) $\arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{14}\sqrt{21}}\right)$

g) $A+(\vec{s}-\vec{t})=(6+5,-1+3,3+1)=(11,2,4)$

h) $\vec{u}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -2\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}\right)=(0,-4,-6)$

i) $\vec{w}\cdot(\vec{s}\wedge\vec{v})=\begin{vmatrix}-2 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2-104+5=-97$

Question 2. (10%)

On a que $A_{\langle P,\mathcal{C}\rangle}=\overrightarrow{PA}_{\mathcal{C}}$ et que $\overrightarrow{PA}_{\mathcal{B}}=(5,-3)_{\mathcal{B}}=a\vec{r}+b\vec{s}=a(-1,-5)_{\mathcal{B}}+b(1,-3)_{\mathcal{B}}=(-a+b,-5a-3b)_{\mathcal{B}}$ d'où $\begin{cases}-a+b=5\\ -5a-3b=-3\end{cases}$ et donc $b=a+5$ et en substituant, $-5a-3(a+5)=-8a-15=-3$ donc $a=-\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{7}{2}$ et finalement, on a que $A_{\mathcal{C}}=\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)_{\mathcal{C}}$.

Question 3. (10%)

$\overrightarrow{AB}=(3,5,1)$ et $\overrightarrow{AC}=(-1,6,3)$ mais $\overrightarrow{AB}\neq k\overrightarrow{AC}$ donc ils ne sont pas colinéaire.

Question 4. (10%)

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{9}(5\overrightarrow{OP}+4\overrightarrow{OQ})=\frac{1}{9}(5(3,2,1)+4(2,5,1))=\frac{1}{9}(15+8,10+20,5+4)=\left(\frac{23}{9},\frac{10}{3},1\right)$$

Question 5. (10%)

$(3t,-1,2)(5,4t,-3) = 15t-4t-6 = 11t-6 = 0$ et donc $t = \dfrac{6}{11}$

Question 6. (12%)

$(3,1,-2) = a\vec{u}+b\vec{v}+cw = a(2,0,1)+b(0,3,-1)+c(-1,4,0)$ d'où $\begin{cases} 2a+0b-c=3 \\ 0a+3b+4c=1 \\ a-b+0c=-2. \end{cases}$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{7}{11},\ b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{29}{11},\ c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{19}{11}$$

Donc $\vec{x} = \left(\dfrac{7}{11}, \dfrac{29}{11}, -\dfrac{19}{11}\right)_{\mathcal{B}}$

Question 7. (10%)

Calculer

a) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 20$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -67$

Question 8. (10%)

$$\left|\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}(-12-20-14-12-8-8)\right| = \frac{74}{2} = 37$$

Question 9. (10%)

a) Soit C le barycentre de $A, B \ldots, F$. On a que $C = \dfrac{1}{6}(1,7,0)$ et $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{CG} = 2\left(\dfrac{11}{24}, -\dfrac{13}{24}, \dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{11}{12}, -\dfrac{13}{12}, 3\right)$.
On obtient donc que $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = (-2,-3,0) + \left(\dfrac{11}{12}, -\dfrac{13}{12}, 3\right) = \left(-\dfrac{13}{12}, -\dfrac{49}{12}, 3\right)$

b) La hauteur est la coordonnée en $\vec{k}$ de $\overrightarrow{OA'}$ donc $= 3$. D'où $V = 37 \cdot 3 = 111$