**Examen 4**
201-NYC Algèbre linéaire
12 décembre 2008
Professeur : Dimitri Zuchowski

---

Consignes

Toute forme de documentation et la calculatrice sont interdite. Toute forme de plagiat et de communication est interdite et entraîne la note ZÉRO. Une réponse, même si elle est bonne, sans justification vaut ZÉRO.

---

**Question 1. (10%)**

Soit les nombres complexes suivante :

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 - i, \quad z_3 = -2 + 3i, \quad z_4 = -5 - 3i$$

Trouver

a) $\text{Im}(z_3)$ b) $\text{Re}(z_4)$ c) $\|z_2\|$ d) $\text{Arg}(z_1)$ e) $\bar{z}_3$

**Question 2. (5%)**

Faites les conversions suivantes

a) $4 - 3i \longrightarrow$ polaire ($z = ||z||e^{i\theta}$).

b) $7e^{i\frac{\pi}{12}} \longrightarrow$ cartésien ($z = a + bi$).

**Question 3. (35%)**

Faites les opérations suivantes sur les nombres complexes.

a) $3(4 - i) - 2(-1 + 7i)$

b) $(4 - 5i) \cdot (-2 + 8i)$

c) $\dfrac{(6 + i)}{(-2 - 2i)}$

d) $\dfrac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$

e) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{43}$

f) $5\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \left(3e^{i\cdot\frac{4\pi}{6}}\right)$

g) $\left(2\cos\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) + 2i\sin\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)\right)^4$

**Question 4. (10%)**

Trouver toutes les racines huitième de l'unité et représentez-les sur le cercle unité.

**Question 5. (10%)**

Trouver toute les racine cubique de $-3 - 3i$ et donner les réponses sous la forme polaire.

**Question 6. (10%)**

Décomposer le polynôme suivant en facteur linéaire. $iz^2 - 3iz - 1 + 3i$

**Question 7. (10%)**

Trouver l'unique solution réelle de l'équation $z^5 - 5z^4 + 13z^3 - 65z^2 + 36z - 180 = 0$ sachant que $-3i$ et $2i$ sont solutions.

**Question 8. (10%)**

Soit $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$. On définit le produit intérieur et le produit extérieur de ces deux nombre comme suit

$$z_1 \circ z_2 = \|z_1\| \|z_2\| \cos\theta = ac + bd$$

et

$$z_1 \wedge z_2 = \|z_1\| \|z_2\| \sin\theta = ad - bc.$$

où $\theta$ est l'angle entre $z_1$ et $z_2$. Démontrer l'égalité suivante :

$$\bar{z}_1 z_2 = (z_1 \circ z_2) + (z_1 \wedge z_2)i$$